

 Departamento de Ciencias Curso 2018-2019	Matemáticas 1 (1º B y C)		
	3ª Evaluación	Global 3	4 de junio de 2019
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 90 minutos.

PUNTUACIÓN: La especificada

1—Representa las siguientes funciones, estudiando en este orden:

Dominio, signo, simetrías , puntos de corte, asíntotas, monotonía y extremos, curvatura e inflexión
(3 pts cada una)

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

b) $g(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$

2—Calcula la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $h(x) = \frac{x+3}{x-2}$ en el punto $x=0$

(1 punto)

3-- Calcula las derivadas de las siguientes funciones **(1 punto cada una)**

a) $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^{-x}}$

b) $g(x) = \frac{\cos 3\sqrt{x^3}}{5}$

c) $h(x) = \sqrt{\tan x^3}$

1)

a) $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ $f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

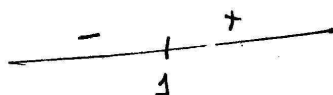
$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2 - 2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$

• Dom(f) = $\mathbb{R} - \{1\}$

• Signo:

$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow$ sin solución

$x-1=0 \Rightarrow x=1$



$f(x) > 0$ en $(1, +\infty)$

$f(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$

• Simetría: $f(-x) = \frac{x^2 + x + 1}{-x - 1}$ No tiene simetría ($f(x) \neq f(-x)$
 $f(x) \neq -f(-x)$)

• Ptos corte: Eje x: $y=0 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow$ No tiene
Eje y: $x=0 \Rightarrow$ corte en el $(0, -1)$

• Asíntotas:

vertical en $x=1$

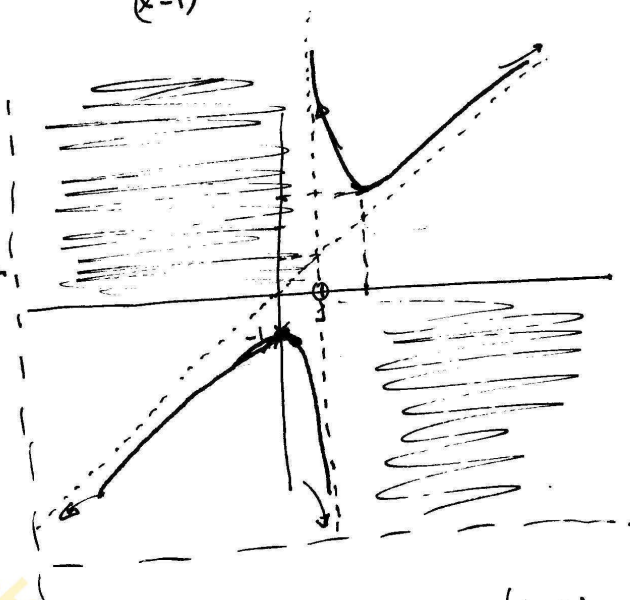
$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = +\infty$

oblicua $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2 + x}{x - 1} =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = 0$



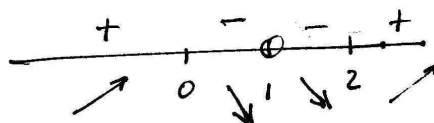
Así, la asíntota será $\boxed{y = x}$

Posición con respecto a la asíntota:

	curva	asíntota	
100	100/0	100	→ En $+\infty$, por arriba
-100	-100/0	-100	→ En $-\infty$, por abajo

- Monotonía y extremos:

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$



f creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

f decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$

Candidatos a extremos $\{0, 2\}$

- Curvatura o inflexión:

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$



f cóncava en $(-\infty, 1)$

f convexa en $(1, +\infty)$

No hay candidatos a inflexión

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Máximo en $(0, -1)$

$f''(2) > 0 \Rightarrow$ Mínimo en $(2, 3)$

$$b) \quad g(x) = \frac{x-3}{x+1} \quad g'(x) = \frac{x+1 - (x-3)}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$g''(x) = 4 \cdot (-2) \cdot (x+1)^{-3} = \frac{-8}{(x+1)^3}$$

• Dom(g) = $\mathbb{R} - \{-1\}$

• Signo:



$f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

$f(x) < 0$ en $(-1, 3)$

• Simetría:

$f(-x) = \frac{-x-3}{-x+1}$. No tiene simetría ($f(x) \neq f(-x)$ y $f(x) \neq -f(-x)$)

• Ptos Corte:

Eje x: $y=0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$ (3,0)

Eje y: $x=0 \Rightarrow$ (0,-3)

• Asíntotas:

Vertical en $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$

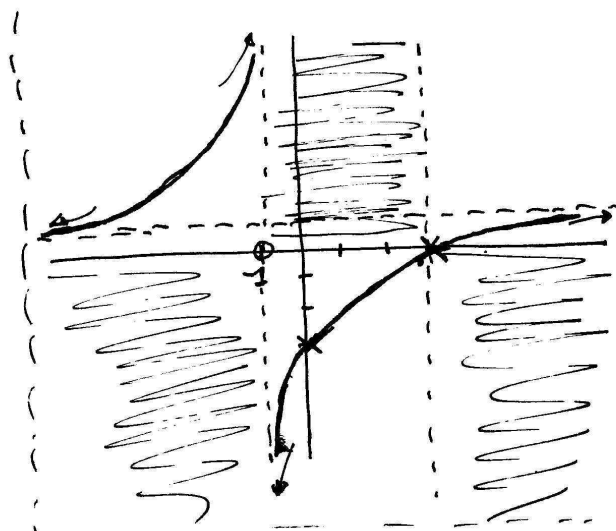
Horizontal en $y = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1$

	Curva	anál.
100	0'96	1
-100	1'04	1

→ En $+\infty$, por abajo.

→ En $-\infty$, por arriba.



- Monotonía y extremos:

$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^2} \rightarrow \text{Creciente en } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

No hay candidatos a extremos.

- Curvatura e inflexión:

$$f''(x) = \frac{-8}{(x+1)^3} \quad \begin{array}{c} + \quad - \\ \cup \quad -1 \quad \cap \end{array}$$

$f(x)$ es convexa en $(-\infty, -1)$ } No hay candi-
 $f(x)$ es cóncava en $(-1, +\infty)$ } datos a inflexión;
 ya que el punto $x = -1$ no está en el dominio.

- ② i) Recta tangente:

$$h'(x) = \frac{x-2-(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2} \Rightarrow h'(0) = -\frac{5}{4}$$

Sabemos que pasa por el punto $(0, f(0))$, así:

$$\begin{aligned}
 y_t &= mx+n \\
 y_t &= -\frac{5}{4}x+n \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{2} = n
 \end{aligned}
 \quad \text{Luego} \quad \boxed{y_t = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}}$$

- ii) Recta normal

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{4}{5}$$

$$y_n = \frac{4}{5}x + n$$

como pasa por el punto $(0, f(0))$:

$$-\frac{3}{2} = n \Rightarrow \boxed{y_n = \frac{4}{5}x - \frac{3}{2}}$$

$$③ \text{ a) } \left(\frac{1+e^x}{1-e^{-x}} \right)' = \frac{e^x(1-e^{-x}) - (1+e^x)e^{-x}}{(1-e^{-x})^2} = \frac{e^x - 1 - e^{-x} - 1}{(1-e^{-x})^2} =$$

$$\begin{array}{l} (1+e^x)' = e^x \\ (1-e^{-x})' = -e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \end{array} \quad \left[\frac{e^x - e^{-x} - 2}{(1-e^{-x})^2} \right]$$

$$\text{b) } \left(\frac{\cos 3\sqrt{x^3}}{5} \right)' = \frac{-\sin 3\sqrt{x^3}}{5} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{x} = \left[-\frac{1}{10} \sqrt{x} \sin 3\sqrt{x^3} \right]$$

$$(3\sqrt{x^3})' = (3x^{3/2})' = 3 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{9}{2} \sqrt{x}$$

$$\text{c) } \left(\sqrt{\tan x^3} \right)' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x^3}} \cdot (\tan x^3)' = \frac{3x^2 \sec^2 x^3}{2\sqrt{\tan x^3}}$$

$$(\tan x^3)' = \sec^2 x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \sec^2 x^3$$