

 Departamento de Ciencias Curso 2018-2019	Matemáticas 1 (1º B y C)		
	3ª Evaluación	JUNIO	20 de junio de 2019
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 55 minutos.

Alumnos con 1ª y 3ª Eval: 1-1, 1-2, 3-1 y los tres primeros apartados de 3-2

Alumnos con 2ª y 3ª Eval: 2-1, 2-2, 2-3, 3-1 y los tres primeros apartados de 3-2

Alumnos con 3ª Eval: 3-1, 3-2, 3-3, 3-4

Alumnos con todo el curso suspenso: 1-1, 2-3, 3-1 y los tres primeros apartados de 3-2

Alumnos que suben nota: 1-1, 2-2, 3-1, los dos primeros apartados de 3-2, y 3-4

PUNTUACIÓN: La especificada

1-1

Resuelve por Gauss: **(2 puntos)**

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 2z = -10 \\ 3x - 4y + 5z = 14 \\ x + y - z = -4 \end{array} \right\}$$

1-2

Resuelve la ecuación: **(1 punto)**

$$\frac{2x+3}{x-1} - 5 = \frac{5x-4}{x+1}$$

2-1

Calcula el dominio de la función $f(x) = \ln \frac{x}{x^2+1}$ **(1 punto)**

2-2

Calcula: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x+1} - \frac{2x^2-3}{2x+2} \right)$ **(1 punto)**

2-3

Calcula y representa las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$ **(1 punto)**

3-1

Estudia monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión de las funciones: **(2 puntos cada una)**

a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$

3-2

Calcula la derivada de las siguientes funciones: **(1 punto cada una)**

a) $f(x) = \ln \frac{2x-1}{x^2}$

b) $g(x) = \arctan(1 + x^2)$

c) $h(x) = \sqrt{x} e^x$

d) $i(x) = \cos^2 \sqrt{x}$

3-3

Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ en el punto $x=0$

(1 punto)

3-4

Obtén los valores de los parámetros **a**, **b** y **c**, para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto $O(0,0)$ y tenga un mínimo local en $A(1,-1)$ **(1 punto)**

1-1

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -10 \\ 3x - 4y + 5z = 14 \\ x + y - z = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = -4 \\ 2x + y - 2z = -10 \\ 3x - 4y + 5z = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 & -10 \\ 3 & -4 & 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & -26 \end{pmatrix} \quad \text{Ya es escalado!!}$$

$$14 - 8z = -26 \Rightarrow 8z = 14 + 26$$

$$8z = 40 \Rightarrow \boxed{z = 5}$$

$$\begin{cases} x + y - z = -4 \\ y = 2 \\ 7y - 8z = -26 \end{cases}$$

$$x + 2 - 5 = -4$$

$$\boxed{x = -4 + 5 - 2 = -1}$$

$$\boxed{\text{Solución } (-1, 2, 5)}$$

1-2

$$\frac{2x+3}{x-1} - 5 = \frac{5x-4}{x+1}$$

Multiplicamos ambos miembros por $(x-1)(x+1) \Rightarrow$

$$(2x+3)(x+1) - 5(x-1)(x+1) = (5x-4)(x-1)$$

$$2x^2 + 2x + 3x + 3 - 5x^2 + 5 = 5x^2 - 5x - 4x + 4$$

$$8x^2 - 14x - 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 7x - 2 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{7 \pm 9}{8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2-1

La función logf tiene dominio donde $f > 0 \Rightarrow$

$$\frac{x}{x^2 + 1} > 0 \quad \begin{array}{c} - \quad 0 \quad + \\ \hline \quad \quad \quad + \end{array}$$

$$\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$$

$$\begin{aligned} \underline{2-2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x+1} - \frac{2x^2-3}{2x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2(x^2-1) - (2x^2-3)}{2x+2} \right) = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-2-2x^2+3}{2x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+2} = \boxed{0} \end{aligned}$$

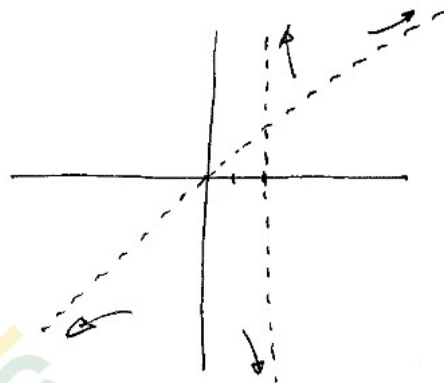
2-3

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$$

A. Vertical: $\boxed{x=2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \left[\frac{1}{0^-} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x+1}{x-2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = +\infty$$



A. Oblicua: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x} = 1$ $\boxed{y=x}$

$$u = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+1}{x-2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+1-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

	Curva	asintota	
100	100.01	100	→ Por arriba
-100	-100.009	-100	→ Por abajo

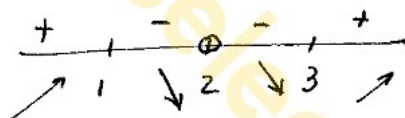
3-1 a) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-2) - (x^2-2x+1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-2x+4-x^2+2x-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x+3) \cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{(2x-4)(x-2) - (x^2-4x+3) \cdot 2}{(x-2)^3} =$$

$$\frac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - 2x^2 + 8x - 6}{(x-2)^3} = \boxed{\frac{2}{(x-2)^3}}$$

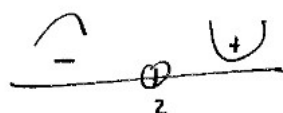
• Monotonía: $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$
 $x_1 = 3$
 $x_2 = 1$



$f(x)$ creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
 $f(x)$ decreciente en $(1, 2) \cup (2, 3)$

Candidatos a extremos $x = 1, 3$

• Curvatura: $f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$



$f(x)$ cóncava en $(-\infty, 2)$

$f(x)$ convexa en $(2, +\infty)$

No hay puntos de inflexión
 (2 no está en el dominio)

$f''(1) < 0 \Rightarrow$ Máximo en $(1, 0)$

$f''(3) > 0 \Rightarrow$ Mínimo en $(3, 4)$

b) $g(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

$g'(x) = \frac{2x(x^2+3) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{2x^3 + 6x - 2x^3}{(x^2+3)^2} = \boxed{\frac{6x}{(x^2+3)^2}}$

$g''(x) = \frac{6(x^2+3)^2 - 6x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = \frac{6(x^2+3) - 24x^2}{(x^2+3)^3} = \boxed{\frac{-18x^2 + 18}{(x^2+3)^3}}$

$$b) (\arctan(1+x^2))' = \frac{(1+x^2)'}{1+(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+1+x^4+2x^2} =$$

$$\boxed{\frac{2x}{x^4+2x^2+2}}$$

$$c) (\sqrt{x e^x})' = \frac{(x e^x)'}{2\sqrt{x e^x}} = \boxed{\frac{e^x(1+x)}{2\sqrt{x e^x}}}$$

$$(x e^x)' = e^x + x e^x = e^x(1+x)$$

$$d) (\cos^2 \sqrt{x})' = 2 \cos \sqrt{x} (\cos \sqrt{x})' = - \frac{2 \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} =$$

$$(\cos \sqrt{x})' = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \boxed{- \frac{\sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

3-3

$$f'(x) = \frac{x-4-(x+1)}{(x-4)^2} = \frac{-5}{(x-4)^2} \Rightarrow f'(0) = -\frac{5}{16}$$

Como pasa por $(0, -\frac{1}{4})$ ($f(0) = -\frac{1}{4}$). Así tenemos:

$$-\frac{1}{4} = -\frac{5}{16} \cdot 0 + n \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{y_T = -\frac{5}{16}x - \frac{1}{4}}$$

Recta normal:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = \frac{16}{5}$$

Esta recta también pasa por el $(0, -\frac{1}{4})$, luego:

$$-\frac{1}{4} = \frac{16}{5} \cdot 0 + n \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Así: } \boxed{y_n = \frac{16}{5}x - \frac{1}{4}}$$



3-4

$$\text{Pasa por } (0,0) \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c=0}}$$

Tiene un mínimo en $x=1 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + b \\ f'(1) &= \underline{\underline{3a+b=0}} \end{aligned}$$

$$f''(x) = 6ax$$

$$f''(1) = 6a = 3 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}$$

Esto se comprueba una vez obtenidos los valores de a, b, c

$$\text{Pasa por el punto } (1,-1) \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1 + c = -1$$

$$\underline{\underline{a+b+c=-1}}$$

Así tenemos:

$$3a+b=0$$

$$a+b+c=-1$$

$$\boxed{c=0}$$

$$3a+b=0$$

$$a+b=-1$$

$$2a=1$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{b = -1 - a = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}}$$

$$\text{Solución: } \boxed{a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}, c = 0}$$