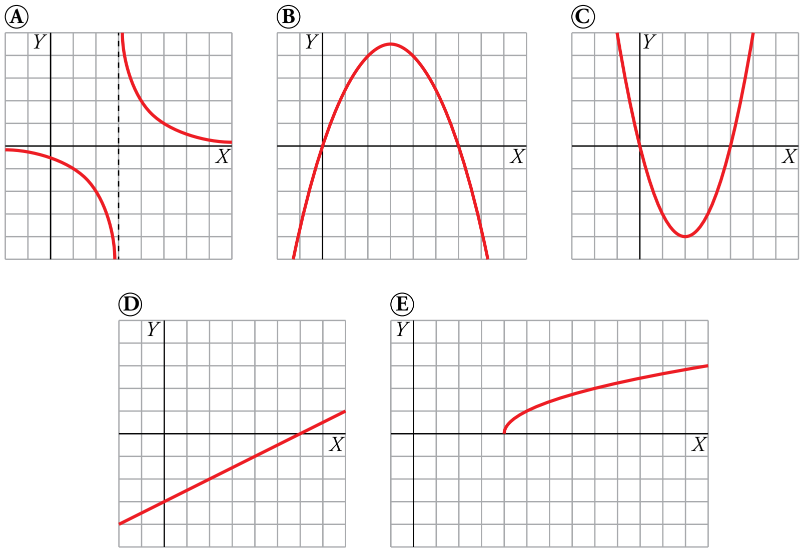
Resuelve

Página 109

Familias de funciones

Asocia a cada una de las siguientes gráficas



una de estas expresiones analíticas:

I. $y = \frac{x-6}{2}$ **II.** $y = \sqrt{x-4}$ **III.** $y = x^2 - 4x$ **IV.** $y = \frac{2}{x-3}$ **V.** $y = 3x - \frac{x^2}{2}$

Asigna a cada una de las cinco funciones anteriores el nombre de la familia a la que pertenece. Todas ellas son de alguna de estas cuatro:

1. Lineal **2. Cuadrática** **3. Raíz** **4. De proporcionalidad inversa**

A) $\to$ IV $\to$ De proporcionalidad inversa.

B) $\to$ V $\to$ Cuadrática.

C) $\to$ III $\to$ Cuadrática.

D) $\to$ I $\to$ Lineal.

E) $\to$ II $\to$ Raíz.

1 Las funciones y su estudio

Página 111

1 ¿Verdadero o falso?

a) El dominio de definición de una función nunca puede ser $\mathbb{R}$.

b) El dominio de definición de $y = -\sqrt{x}$ es $[0, +\infty)$.

c) El dominio de definición de $y = \sqrt{-x}$ es $(-\infty, 0]$.

a) Falso. Por ejemplo, el dominio de la función cuadrática $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ es $\mathbb{R}$.

b) Verdadero. Siempre que $x \ge 0$ la función está definida.

c) Verdadero. Cuando $x \le 0$, se tiene que $-x \ge 0$ y la función está definida correctamente.

2 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 1}$ **b)** $y = \sqrt{x - 1}$ **c)** $y = \sqrt{1 - x}$ **d)** $y = \sqrt{4 - x^2}$

e) $y = \sqrt[3]{x^2 - 4}$ **f)** $y = 1/\sqrt{x^2 - 1}$ **g)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$ **h)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

i) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4 - x^2}}$ **j)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$ **k)** $y = x^3 - 2x + 3$ **l)** $y = \dfrac{1}{x}$

m) $y = \dfrac{1}{x^2}$ **n)** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$ **ñ)** $y = \dfrac{1}{x^2 + 4}$ **o)** $y = \dfrac{1}{x^3 + 1}$

p) El área de un círculo de radio variable, r, es $A = \pi r^2$.

a) Para que esté definida debe ocurrir que $x^2 - 1 \ge 0$. Ahora resolvemos la inecuación y se tiene que $Dom = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

b) $[1, +\infty)$

c) $(-\infty, 1]$

d) $[-2, 2]$

e) La raíz cúbica está definida independientemente del signo del radicando. Como este es un polinomio de 2.º grado, también está siempre definido. Por tanto, el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

f) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

g) Por un lado, $x \ge 1$ para que se pueda definir la raíz. Pero, además, $x \ne 1$ para que no se produzca una división entre 0. Por tanto, $Dom = (1, +\infty)$.

h) Razonando de forma análoga al apartado anterior, $x \le 1$ y $x \ne 1$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 1)$.

i) En esta ocasión la raíz cúbica siempre está definida, pero para que lo esté el cociente, el denominador no puede ser 0.

$x^2 - 4 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$ y el dominio de definición es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

j) Por una parte, $x^2 - 4 \ge 0$, que ocurre siempre que x esté en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Pero x no puede ser ni 2 ni –2 para no dividir entre 0. Luego el dominio es $Dom = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

k) Su dominio es $\mathbb{R}$, ya que siempre está definida.

l) $\mathbb{R} - \{0\}$

m) $\mathbb{R} - \{0\}$

n) $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

ñ) Como la ecuación $x^2 + 4 = 0$ no tiene solución, el dominio de definición es $Dom = \mathbb{R}$.

o) La ecuación $x^3 + 1 = 0$ tiene una única solución, $x = -1$. Luego el domino es $Dom = \mathbb{R} - \{-1\}$.

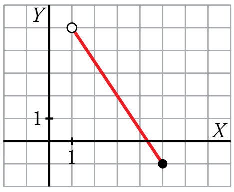
p) Por el contexto de la función, estará definida en $(0, +\infty)$ ya que el radio es siempre un número positivo.

2 Funciones lineales. Interpolación

Página 113

1 Representa la siguiente función:

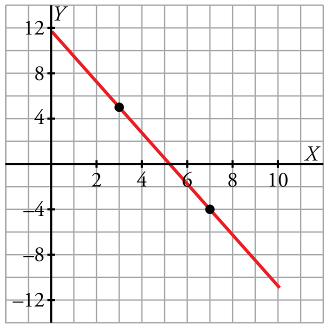
$$y = -2x + 7, \quad x \in (1, 4]$$



2 Una función lineal f cumple: $f(3) = 5$, $f(7) = -4$, $Dom(f) = [0, 10]$. ¿Cuál es su expresión analítica? Represéntala.

$$m = \frac{-4-5}{7-3} = -\frac{9}{4}$$

$$y = 5 - \frac{9}{4}(x-3) = -\frac{9}{4}x + \frac{47}{4}, \quad x \in [0, 10]$$



3 En una universidad, en el año 2009 había 10 400 alumnos matriculados, y 13 200 en el 2014. Estima cuántos había:

a) En el año 2010. **b) En el 2012.** **c) En el 2007.**

d) ¿Cuántos cabe esperar que haya en el 2017?

e) ¿Y en el 2047?

$$f(x) = \frac{13\,200 - 10\,400}{2007 - 2002}(x - 2002) + 10\,400 = 560(x - 2002) + 10\,400$$

a) $f(2003) = 560 + 10\,400 = 10\,960$ alumnos.

b) $f(2005) = 1\,680 + 10\,400 = 12\,080$ alumnos.

c) $f(2000) = -1\,120 + 10\,400 = 9\,280$ alumnos.

d) $f(2010) = 4\,480 + 10\,400 = 14\,880$ alumnos.

e) $f(2040) = 21\,280 + 10\,400 = 31\,680$ alumnos, aunque la extrapolación es demasiado grande.

4 El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 *l* y a 90 km/h consume 7,2 *l*.

a) Estima su consumo si recorre 100 km a 80 km/h.

b) ¿Cuánto consumirá a 100 km/h?

c) ¿Y a 200 km/h?

a) $f(x) = \frac{7{,}2 - 5{,}7}{90 - 60}(x - 60) + 5{,}7 = \frac{1{,}5}{30}(x - 60) + 5{,}7$

$f(70) = 0{,}5 + 5{,}7 = 6{,}2\ l$

b) $f(100) = 2 + 5{,}7 = 7{,}7\ l$

c) $f(200) = 7 + 5{,}7 = 12{,}7\ l$, aunque la extrapolación es demasiado grande.

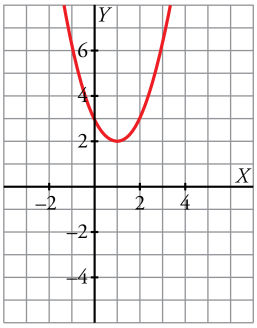
3 Funciones cuadráticas. Interpolación

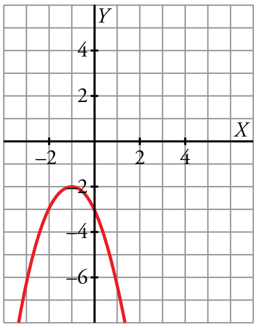
Página 114

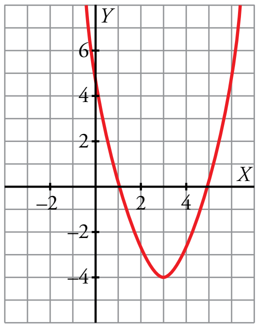
1 Representa estas parábolas:

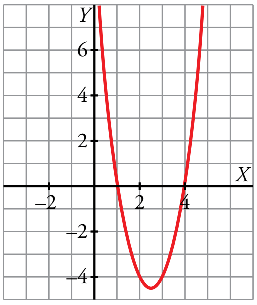
a) $y = x^2 - 2x + 3$ **b)** $y = -x^2 - 2x - 3$ **c)** $y = x^2 - 6x + 5$

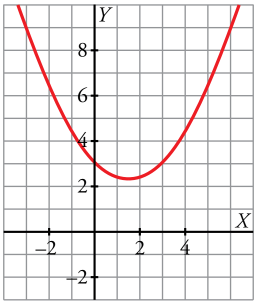
d) $y = 2x^2 - 10x + 8$ **e)** $y = \frac{1}{3}x^2 - x + 3$ **f)** $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

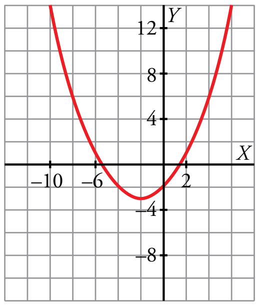
a)


b)


c)


d)


e)


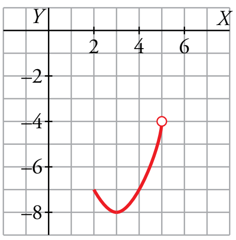
f)


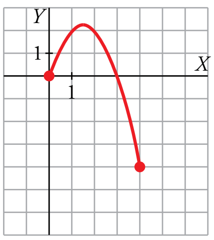
2 Representa las funciones siguientes:

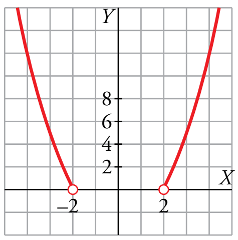
a) $y = x^2 - 6x + 1, \; x \in [2, 5)$

b) $y = -x^2 + 3x, \; x \in [0, 4]$

c) $y = x^2 - 4, \; x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

a)


b)


c)


Página 115

Hazlo tú. Halla la ecuación de la parábola que pasa por (0, 3), (2, –3) y (6, 9).

$y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l}(0,3) \to 3 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \to c = 3 \\ (2,-3) \to -3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 3 \to 4a + 2b = -6 \\ (6,9) \to 9 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + 3 \to 36a + 6b = 6\end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones: $a = 1, \; b = -5, \; c = 3$

La parábola buscada es $y = x^2 - 5x + 3$.

Hazlo tú. **Halla, por el método de Newton, la ecuación de la parábola que pasa por (0, 3), (2, –3) y (6, 9). Comprueba que es la misma que se obtiene en el *Hazlo tú* anterior.**

$y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 2)$

$(0, 3) \to 3 = p + m \cdot (0 - 0) + n \cdot (0 - 0) \cdot (0 - 2) \to p = 3$

$(2, -3) \to -3 = 3 + m \cdot (2 - 0) + n \cdot (2 - 0) \cdot (2 - 2) \to 3 + 2m = -3 \to m = -3$

$(6, 9) \to 9 = 3 - 3 \cdot (6 - 0) + n \cdot (6 - 0) \cdot (6 - 2) \to 3 - 18 + 24n = 9 \to n = 1$

La parábola buscada es:

$y = 3 - 3 \cdot (x - 0) + 1(x - 0)(x - 2) = 3 - 3x + x^2 - 2x = x^2 - 5x + 3$

3 Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (–1, 0), (2, 12) y (8, –72).

a) Usando su ecuación en forma general.

b) Por el método de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-1,0) \to 0 = a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c \to a - b + c = 0 \\ (2,12) \to 12 = a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c \to 4a + 2b + c = 12 \\ (8,-72) \to -72 = a\cdot 8^2 + b\cdot 8 + c \to 64a + 8b + c = -72 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema: $a = -2, \ b = 6, \ c = 8$

La parábola buscada es $y = -2x^2 + 6x + 8$.

b) $y = p + m(x + 1) + n(x + 1)(x - 2)$

$(-1, 0) \to 0 = p + m \cdot (-1 + 1) + n \cdot (-1 + 1) \cdot (-1 - 2) \to p = 0$

$(2, 12) \to 12 = m \cdot (2 + 1) + n \cdot (2 + 1) \cdot (2 - 2) \to 3m = 12 \to m = 4$

$(8, -72) \to -72 = 4 \cdot (8 + 1) + n \cdot (8 + 1) \cdot (8 - 2) \to 36 + 54n = -72 \to n = -2$

La parábola buscada es:

$y = 0 + 4(x + 1) + (-2)(x + 1)(x - 2) = 4x + 4 + (-2)(x^2 - x - 2) = 4x + 4 - 2x^2 + 2x + 4 = -2x^2 + 6x + 8$

4 Halla los puntos de la parábola $y = x^2 + 6x + 5$ cuyas abscisas son 0, 3 y 5.

Obtén, por el método de Newton, la parábola que pasa por esos tres puntos y comprueba que es la misma.

Los puntos son (0, 5), (3, 32) y (5, 60).

$y = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 3)$

$(0, 5) \to 5 = p + m \cdot (0 - 0) + n \cdot (0 - 0) \cdot (0 - 3) \to p = 5$

$(3, 32) \to 32 = 5 + m \cdot (3 - 0) + n \cdot (3 - 0) \cdot (3 - 3) \to 5 + 3m = 32 \to m = 9$

$(5, 60) \to 60 = 5 + 9 \cdot (5 - 0) + n \cdot (5 - 0) \cdot (5 - 3) \to 5 + 45 + 10n = 60 \to n = 1$

La parábola buscada es:

$y = 5 + 9(x - 0) + 1(x - 0)(x - 3) = 5 + 9x + x^2 - 3x = x^2 + 6x + 5$

Página 116

Hazlo tú. El porcentaje de paro en España en algunos años fue:

AÑO	1994	1997	2000
%	24,1	20,6	13,9

Estima, mediante una interpolación parabólica, el porcentaje de paro en 1998, 2001 y 2003 y compáralo con los valores reales:

AÑO	1998	2001	2003
%	18,6	10,63	11,37

Tomamos como año cero el año 1994. Hemos de obtener la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (0; 24,1), (3; 20,6) y (6; 13,9).

$y = P(x) = p + m(x - 0) + n(x - 0)(x - 3) \rightarrow y = P(x) = p + mx + nx(x - 3)$

$(0; 24,1) \rightarrow 24,1 = p + m \cdot 0 + n \cdot 0 \rightarrow p = 24,1$

$(3; 20,6) \rightarrow 20,6 = 24,1 + 3m + n \cdot 0 \rightarrow m = -\dfrac{3,5}{3} = -1,167$

$(6; 13,9) \rightarrow 13,9 = 24,1 - \dfrac{3,5}{3} \cdot 6 + n \cdot 6 \cdot 3 \rightarrow 18n = -3,2 \rightarrow n = -\dfrac{1,6}{9} = -0,178$

La parábola buscada es:

$P(x) = y = 24,1 - 1,167x - 0,178x(x - 3) \rightarrow y = -0,178x^2 - 0,633x + 24,1$

Obtenemos el valor de $P(x)$ en los puntos pedidos:

$1998 \rightarrow x = 4 \rightarrow P(4) = -0,178 \cdot 16 - 0,633 \cdot 4 + 24,1 = 18,72$ (está muy próximo al valor real, 18,6).

$2001 \rightarrow x = 7 \rightarrow P(7) = -0,178 \cdot 49 - 0,633 \cdot 7 + 24,1 = 10,947$ (está muy próximo al valor real, 10,63).

$2003 \rightarrow x = 9 \rightarrow P(9) = -0,178 \cdot 81 - 0,633 \cdot 9 + 24,1 = 3,985$ (muy alejado del valor real, 11,37).

5 En una universidad, en el año 2009 había 10 400 estudiantes, 11 300 en 2011 y 13 200 en 2014. Estima cuántos había:

a) En el año 2010. b) En el 2012. c) En el 2007.

d) ¿Cuántos cabe esperar que haya en el 2017?

Este enunciado es como el del ejercicio 3 del epígrafe anterior, pero enriquecido con un nuevo dato correspondiente al año 2011, con lo que ahora, con tres puntos, se puede efectuar una interpolación parabólica.

Tenemos estos tres puntos: (0, 10 400), (2, 11 300) y (5, 13 200).

$y = c + b(x - 0) + a(x - 0)(x - 2) \rightarrow y = c + bx + ax(x - 2)$

$x = 0 \rightarrow 10\,400 = c \rightarrow c = 10\,400$

$x = 2 \rightarrow 11\,300 = c + b \cdot 2 \rightarrow b = 450$

$x = 5 \rightarrow 13\,200 = c + b \cdot 5 + a \cdot 5 \cdot 3 \rightarrow a = 36,67$

$y = 10\,400 + 450x + 36,67x(x - 2) = P(x)$

a) $2010 \rightarrow x = 1 \rightarrow P(1) = 10\,400 + 450 \cdot 1 + 36,67 \cdot 1 \cdot (-1) = 10\,813,33$

b) $2012 \rightarrow x = 3 \rightarrow P(3) = 10\,400 + 450 \cdot 3 + 36,67 \cdot 3 \cdot 1 = 11\,960$

c) $2007 \rightarrow x = -2 \rightarrow P(-2) = 10\,400 + 450 \cdot (-2) + 36,67 \cdot (-2) \cdot (-4) = 9\,793,36$

d) $2017 \rightarrow x = 8 \rightarrow P(8) = 10\,400 + 450 \cdot 8 + 36,67 \cdot 8 \cdot 6 = 15\,760,16$

6 **El consumo de gasolina de cierto automóvil, por cada 100 km, depende de su velocidad. A 60 km/h consume 5,7 *l*; a 70 km/h, 6 *l*, y a 90 km/h consume 7,2 *l*. Calcula cuánto gastará por cada 100 km recorridos yendo a una velocidad de:**

a) 80 km/h

b) 100 km/h

c) 200 km/h

Este enunciado es como el del ejercicio 4 del epígrafe anterior, pero enriquecido con un nuevo dato correspondiente al consumo a 70 km/h, con lo que ahora, con tres puntos, se puede efectuar una interpolación parabólica.

Tenemos estos tres puntos: (60; 5,7), (70; 6) y (90; 7,2).

$y = c + b(x - 60) + a(x - 60)(x - 70)$

$x = 60 \rightarrow 5{,}7 = c \rightarrow c = 5{,}7$

$x = 70 \rightarrow 6 = c + b \cdot (70 - 60) \rightarrow b = 0{,}03$

$x = 90 \rightarrow 7{,}2 = c + b \cdot (90 - 60) + a \cdot (90 - 60)(90 - 70) \rightarrow a = 0{,}001$

$y = c + 0{,}03 \cdot (x - 60) + 0{,}001 \cdot (x - 60)(x - 70)$

a) $y(80) = 6{,}5$

b) $y(100) = 8{,}1$

c) $y(200) = 28{,}1$

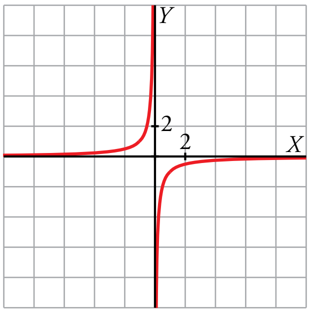
4 Funciones de proporcionalidad inversa

Página 117

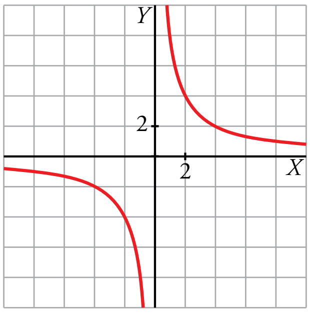
1 **Representa:** **a)** $y = -\frac{1}{x}$ **b)** $y = \frac{8}{x}$ **c)** $y = -\frac{6}{x}$ **d)** $y = \frac{12}{x}$ **e)** $y = -\frac{16}{x}$

En todos los casos, las asíntotas son los ejes coordenados. Podemos calcular algunos puntos de coordenadas enteras para representar cada una de las funciones.

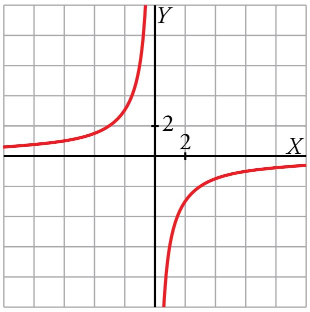
a)



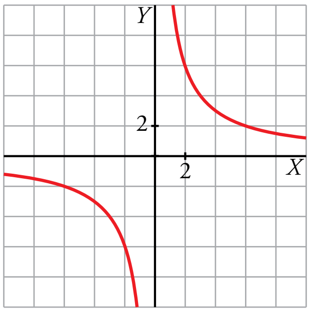
b)



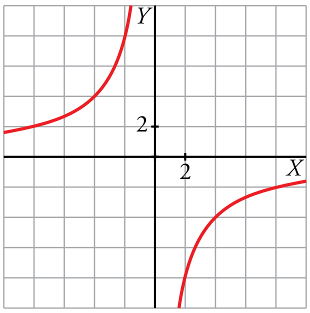
c)



d)



e)

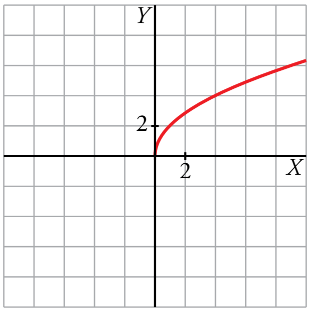


5 Funciones raíz

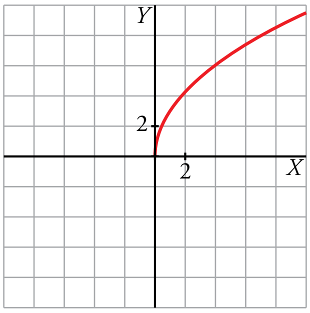
Página 118

1 **Representa:** a) $y = \sqrt{4x}$ b) $y = \sqrt{9x}$ c) $y = -\sqrt{9x}$ d) $y = \sqrt{-9x}$ e) $y = \sqrt[3]{-8x}$

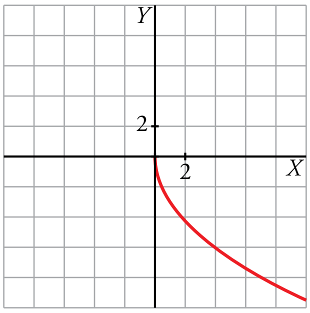
a)



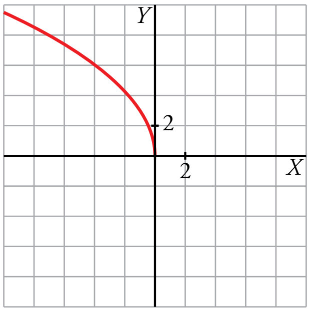
b)



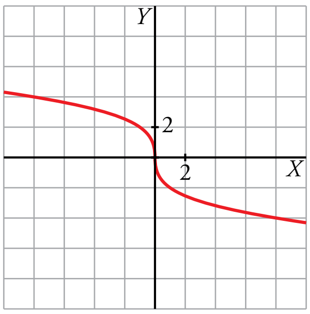
c)



d)

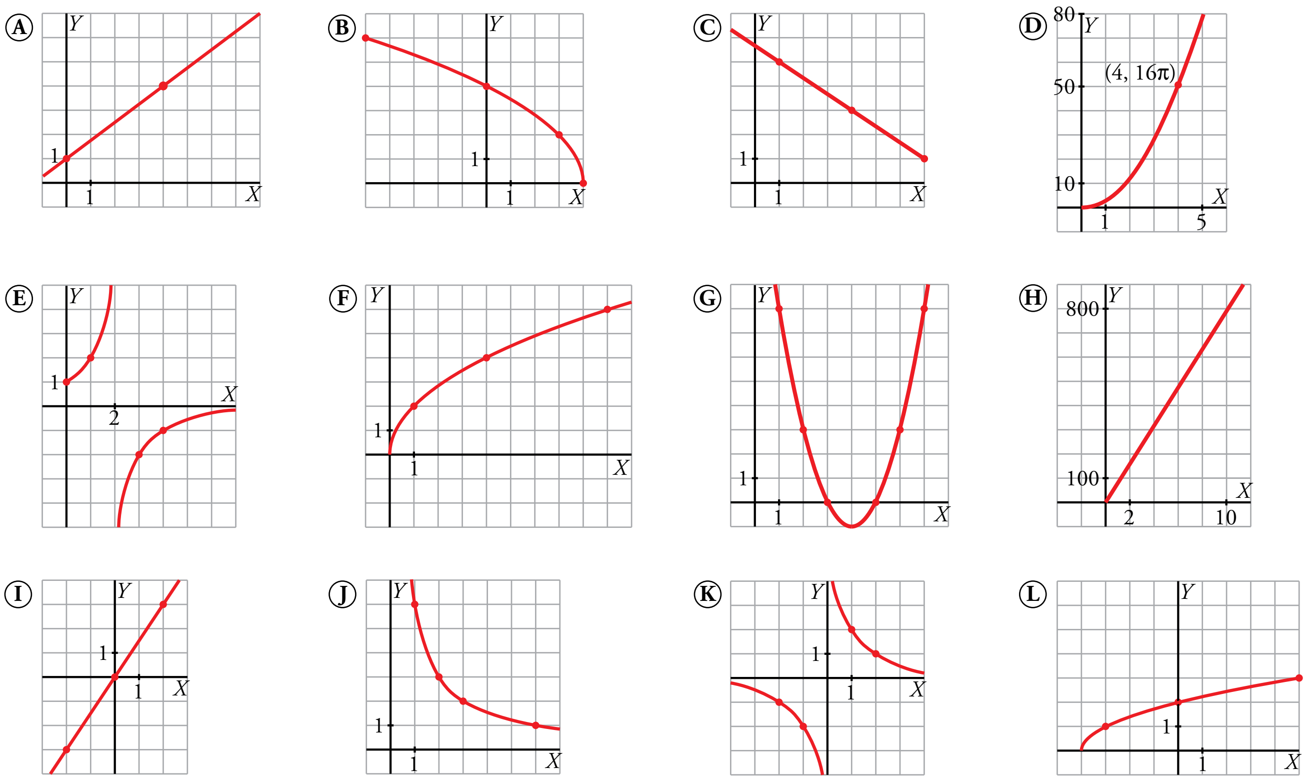


e)



Página 119

2 Asocia a cada una de las siguientes gráficas una de las ecuaciones de abajo. Observa que hay más ecuaciones que gráficas.



LINEALES	CUADRÁTICAS	PROPORCIONALIDAD INVERSA	RADICALES
L1 $y = \frac{3}{2}x$	C1 $y = x^2 - 8x + 15$	PI1 $y = \frac{1}{x}$	R1 $y = \sqrt{2x + 4}$
L2 $y = -\frac{2}{3}(x - 1) + 5$	C2 $y = (x + 3)(x + 5)$	PI2 $y = \frac{2}{2 - x}$	R2 $y = \sqrt{x + 4}$
L3 $y = 25\pi x$	C3 $y = x^2,\ x > 0$	PI3 $y = \frac{2}{x}$	R3 $y = 2\sqrt{4 - x}$
L4 $y = \frac{3}{4}x + 1$	C4 $y = \pi x^2,\ x > 0$	PI4 $y = \frac{6}{x},\ x > 0$	R4 $y = \sqrt{4x},\ x > 0$

$A \to L_4$ $\quad B \to R_3$ $\quad C \to L_2$ $\quad D \to C_4$ $\quad E \to PI_2$ $\quad F \to R_4$

$G \to C_1$ $\quad H \to L_3$ $\quad I \to L_1$ $\quad J \to PI_4$ $\quad K \to PI_3$ $\quad L \to R_2$

3 Cada uno de los siguientes enunciados se corresponde con una gráfica de entre las del ejercicio anterior. Identifícala.

1. Superficie, en centímetros cuadrados, de un círculo. Radio, en centímetros.

2. Aumento de una lupa. Distancia al objeto, en centímetros.

3. Periodo de un péndulo. Longitud, en metros.

4. Volumen de un cilindro, en centímetros cúbicos. El radio del círculo de su base mide 5 cm. Altura, en centímetros.

5. Longitud de un muelle, en decímetros. Mide 1 dm y se alarga 75 mm por cada kilo que se le cuelga.

6. Dimensiones (largo y ancho, en centímetros) de rectángulos cuya superficie es de 6 cm².

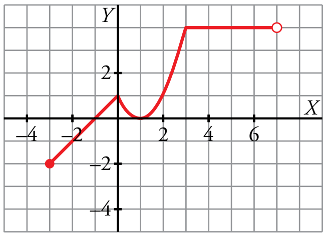
$1 \to D \quad 2 \to E \quad 3 \to F \quad 4 \to H \quad 5 \to A \quad 6 \to J$

6 Funciones definidas "a trozos"

Página 120

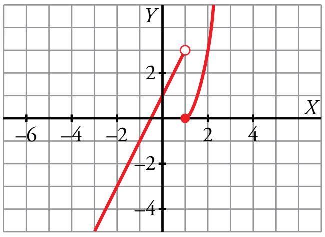
1 Representa esta función:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \in [-3, 0) \\ x^2 - 2x + 1 & x \in [0, 3] \\ 4 & x \in (3, 7) \end{cases}$$

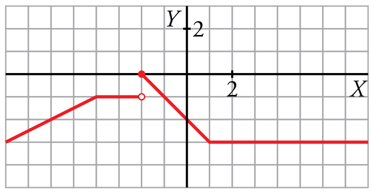


2 Haz la representación gráfica de la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



3 Escribe la expresión analítica que corresponde a la siguiente gráfica:



Primer tramo:

- Recta que pasa por los puntos $(-6, -2)$ y $(-4, -1)$.
- La pendiente es $\dfrac{-1-(-2)}{-4-(-6)} = \dfrac{1}{2}$ y la ecuación es $y - (-1) = \dfrac{1}{2}(x - (-4))$.

Segundo tramo:

- $y = -1$

Tercer tramo:

- Pertenece a una recta que pasa por $(0, -2)$ y $(1, -3)$.
- La pendiente es $\dfrac{-3-(-2)}{1-0} = -1$ y la ecuación es $y - (-2) = -x$.

Cuarto tramo: $y = -3$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & \text{si } x < -4 \\ -1 & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ -x - 2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ -3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Página 121

Practica

Ent(7,5) = 7

Ent(–4) = –4

Ent(–5,3) = –6 **¡atención!**

Continúa:

***Ent*(6,48)**	***Ent*(7)**	***Ent*(–3,9)**	***Ent*(–11,3)**	***Ent*(–8)**
Ent (6,48) = 6	*Ent* (7) = 7	*Ent* (–3,9) = –4	*Ent* (–11,3) = –12	*Ent* (–8) = –8

Practica

***Mant*(7,68) = 0,68**

***Mant*(–8) = 0**

***Mant*(–7,68) = 0,32**

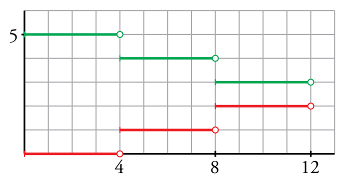
Continúa:

***Mant*(3,791)**	***Mant*(–6,94)**	***Mant*(2)**	***Mant*(–4,804)**
Mant (3,791) = 0,791	*Mant* (–6,94) = 0,06	*Mant* (2) = 0	*Mant* (–4,804) = 0,196

4 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a la función $y = Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica verde corresponde a la función $y = 5 + Ent\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero.

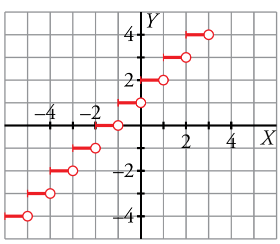
b) Falso. La gráfica verdes es $y = 5 - Ent\left(\frac{x}{4}\right)$

5 **Representa:**

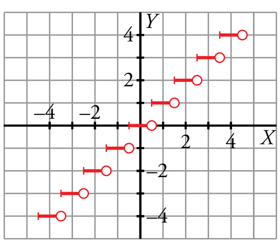
a) $y = Ent(x) + 2$

b) $y = Ent(x + 0{,}5)$

a) $y = Ent\ (x) + 2$



b) $y = Ent\ (x + 0{,}5)$

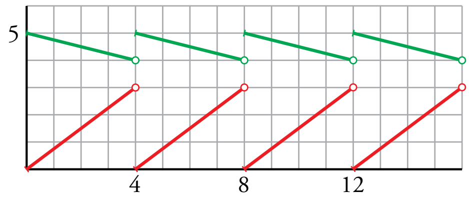


6 **¿Verdadero o falso?**

a) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.

b) La gráfica roja corresponde a $y = 3Mant(4x)$.

c) La gráfica verde corresponde a $y = 5 - Mant\left(\frac{x}{4}\right)$.



a) Verdadero

b) Falso

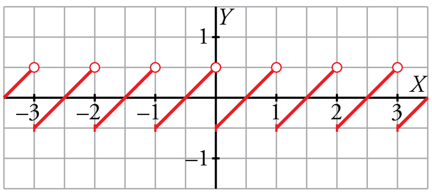
c) Verdadero

7 **Representa:**

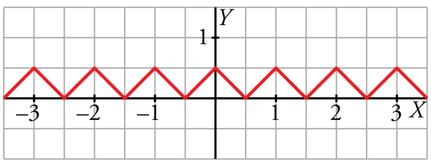
a) $y = Mant(x) - 0{,}5$

b) $y = |Mant(x) - 0{,}5|$

a) $y = Mant\ (x) - 0{,}5$



b) $y = |Mant\ (x) - 0{,}5|$



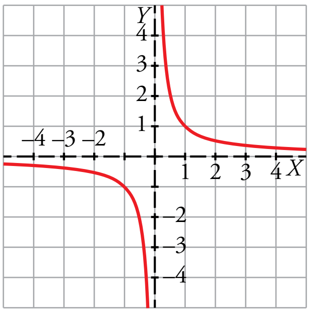
7 Transformaciones elementales de funciones

Página 122

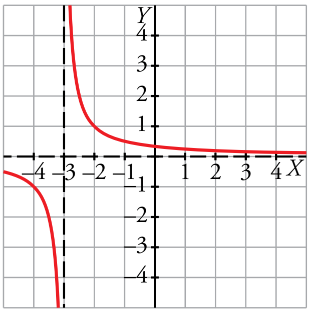
1 **Representa sucesivamente:**

a) $y = \dfrac{1}{x}$ **b)** $y = \dfrac{1}{x+3}$ **c)** $y = -\dfrac{1}{x+3}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x+3} + 8$

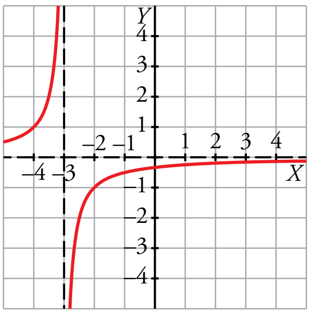
a)



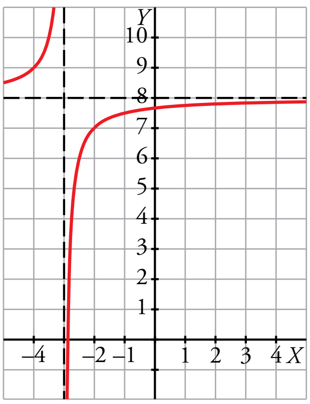
b) Se obtiene desplazando la gráfica anterior tres unidades a la izquierda.



c) Es la simétrica de la anterior respecto del eje X.



d) Es igual a la anterior trasladándola 8 unidades hacia arriba.



Página 123

2 **Si $y = f(x)$ pasa por (3, 8), di un punto de:**

$$y = f(x) - 6,\ y = f(x + 4),\ y = \frac{1}{2}f(x),\ y = 2f(x),\ y = -f(x),\ y = f(-x),\ y = -2f(-x) + 3$$

$y = f(x) - 6 \to (3, 2)$ $\quad y = f(x + 4) \to (-1, 8)$ $\quad y = \frac{1}{2}f(x) \to (3, 4)$

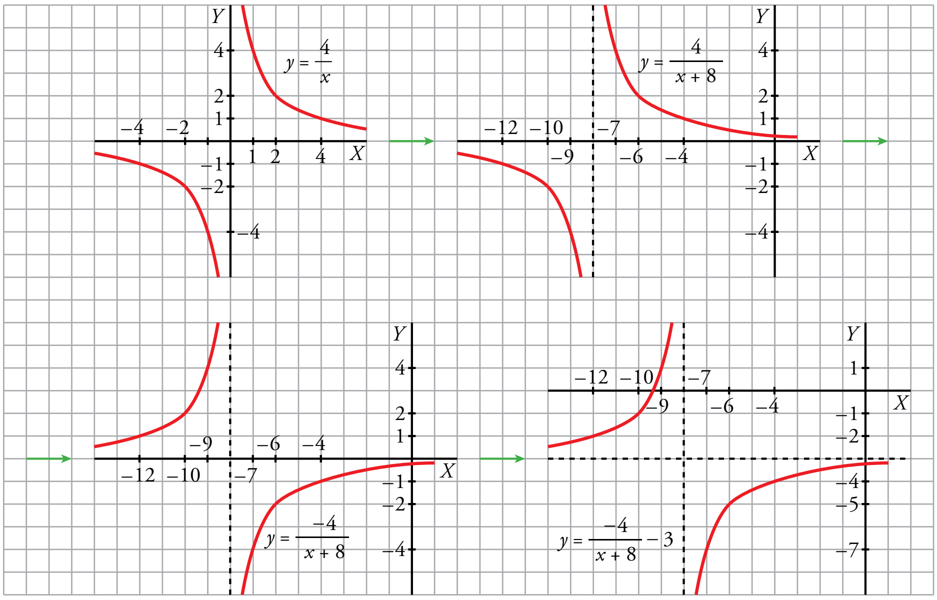
$y = 2f(x) \to (3, 16)$ $\quad y = -f(x) \to (3, -8)$ $\quad y = f(-x) \to (-3, 8)$

$y = -2f(-x) + 3 \to (-3, -13)$

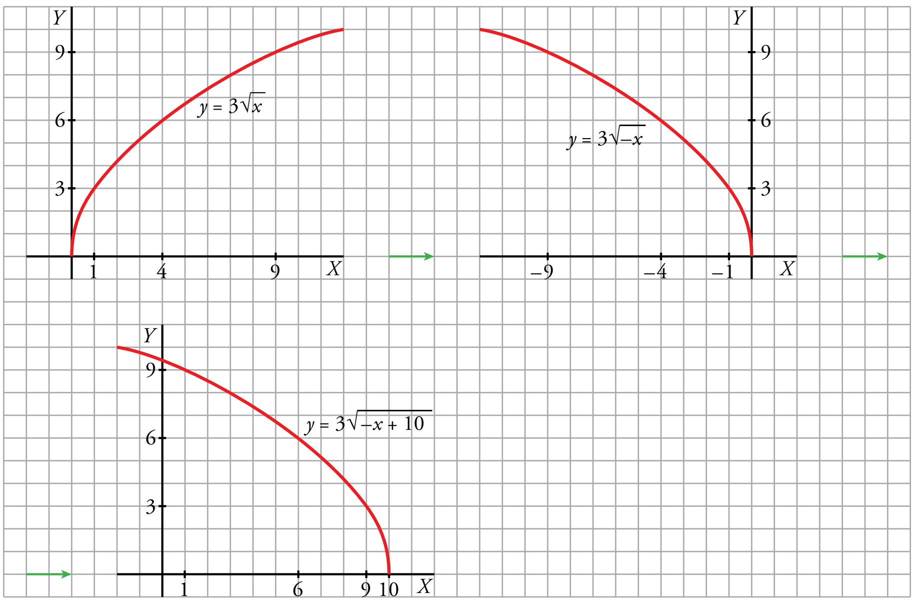
3 **Representa:**

a) $y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$ **b)** $y = 3\sqrt{-x+10}$

a) Representamos $y = \dfrac{4}{x} \to y = \dfrac{4}{x+8} \to y = -\dfrac{4}{x+8} \to y = -\dfrac{4}{x+8} - 3$



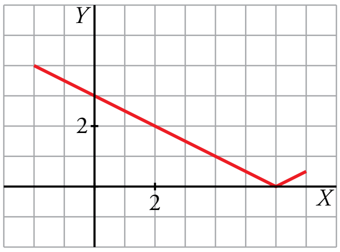
b) Representamos $y = 3\sqrt{x} \to y = 3\sqrt{-x} \to y = 3\sqrt{-(x-10)}$



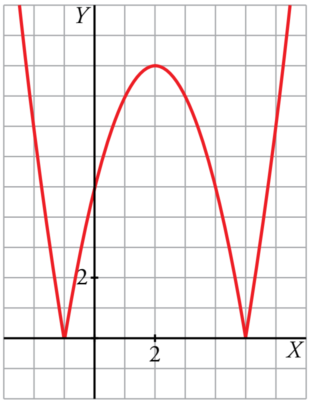
Página 124

4 **Representa:** a) $y = \left|\frac{x}{2} - 3\right|,\ x \in [-2, 7]$ b) $y = |-x^2 + 4x + 5|$ c) $y = |x| - |x - 4|$ d) $y = |x + 2| + |x - 3|$

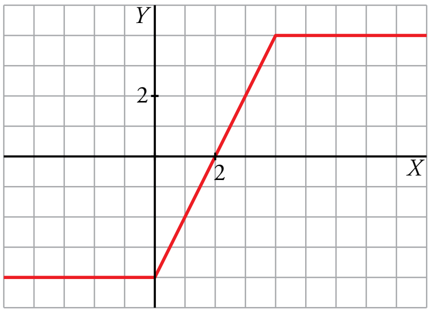
a)



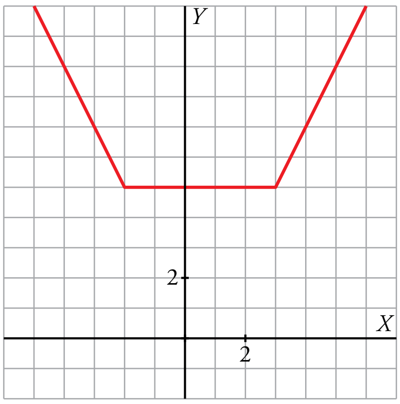
b)



c) $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $|x - 4| = \begin{cases} -x + 4 & \text{si } x \le 4 \\ x - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ $|x| - |x - 4| = \begin{cases} -x - (-x + 4) = -4 & \text{si } x \le 0 \\ x - (-x + 4) = 2x - 4 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ x - (x - 4) = 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$



d) $|x + 2| = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \le -2 \\ x + 2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$ $|x - 3| = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ $|x + 2| + |x - 3| = \begin{cases} -x - 2 - x + 3 = -2x + 1 & \text{si } x \le -2 \\ x + 2 - x + 3 = 5 & \text{si } -2 < x \le 3 \\ x + 2 + x - 3 = 2x - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$



Ejercicios y problemas resueltos

Página 125

1. Dominio de definición

Hazlo tú. Halla el dominio de definición de esta función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$$

La función está definida cuando $x^2 - 4x - 5 \geq 0$.

Resolvemos la inecuación buscando, en primer lugar, las soluciones de la ecuación:

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -1;\ x = 5$$

Construimos la tabla de los signos:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 5)$	$(5, +\infty)$
SIGNO DE $x^2 - 4x - 5$	+	–	+

Por tanto, el dominio de definición de f es $(-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$.

2. Interpolación lineal

Hazlo tú. La población de un municipio era de 23 442 habitantes en el año 2000 y de 26 087 en el año 2012. Estima la población en los años 2005 y 2013.

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2 000, 23 442) y (2 012, 26 087).

Pendiente: $m = \dfrac{26087 - 23442}{2012 - 2000} = 220{,}42$

Ecuación: $f(x) = 23442 + 220{,}42(x - 2000) = 220{,}42x - 417400$

La población estimada en el año 2005 es:

$$x = 2005 \rightarrow f(2005) = 220{,}42 \cdot 2005 - 417400 \approx 24542 \text{ personas}$$

La población estimada en el año 2013 es:

$$x = 2013 \rightarrow f(2013) = 220{,}42 \cdot 2013 - 417400 \approx 26305 \text{ personas}$$

3. Función cuadrática

Hazlo tú. Representa la siguiente función:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31,\ \ 4 \leq t \leq 7$$

La función $f(t)$ es una parábola con las ramas abiertas hacia abajo.

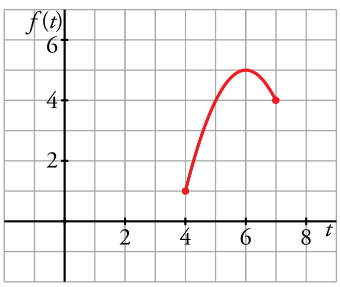
Calculamos las coordenadas del vértice:

$$t = \frac{-12}{-2} = 6 \rightarrow f(6) = -6^2 + 12 \cdot 6 - 31 = 5 \rightarrow \text{El punto } (6, 5) \text{ es el vértice de la parábola.}$$

Hallamos los valores de la función en los extremos del intervalo dominio de definición:

$$f(4) = -4^2 + 12 \cdot 4 - 31 = 1 \rightarrow \text{Pasa por el punto } (4, 1).$$

$$f(7) = -7^2 + 12 \cdot 7 - 31 = 4 \rightarrow \text{Pasa por el punto } (7, 4).$$



Página 126

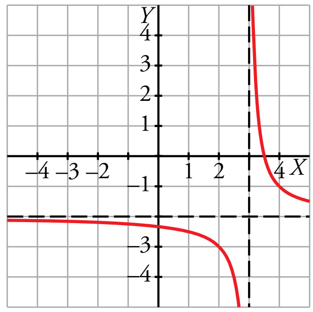
5. Hipérbolas

Hazlo tú. Representa la función:

$$y = \frac{-2x+7}{x-3}$$

$y = \dfrac{-2x+7}{x-3} = -2 + \dfrac{1}{x-3}$ (efectuando la división entre el numerador y el denominador).

Por tanto, la gráfica es como la de $y = \dfrac{1}{x}$ desplazándola 2 unidades hacia abajo y 3 unidades a la derecha.



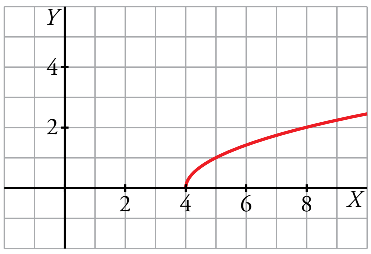
Página 127

6. Transformaciones de una función

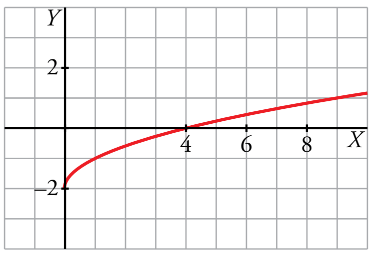
Hazlo tú. A partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, representa estas funciones:

a) $g(x) = f(x-4)$ b) $h(x) = f(x) - 2$ c) $i(x) = \sqrt{2x}$

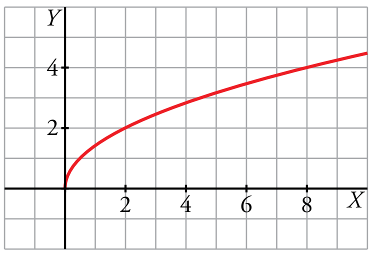
a) La gráfica de $g(x) = \sqrt{x-4}$ es como la de $f(x) = \sqrt{x}$ desplazada 4 unidades a la derecha.



b) La gráfica de $h(x) = \sqrt{x} - 2$ es como la de $f(x)$ desplazada 2 unidades hacia abajo.



c) La gráfica de $i(x) = \sqrt{2x}$ es como la de $f(x)$ contrayéndola en sentido horizontal, dividiendo entre 2.

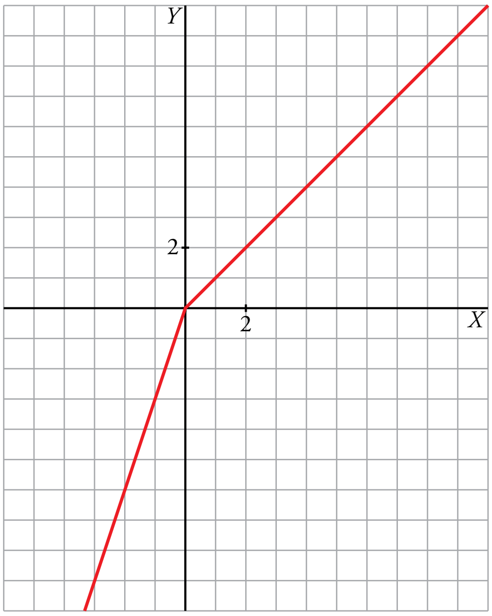


7. Valor absoluto de una función

Hazlo tú. **Define por intervalos y representa:**

a) $f(x) = 2x - |x|$

b) $f(x) = \left| 2 - \dfrac{x^2}{2} \right|$



a) Teniendo en cuenta cómo está definida la función valor absoluto,

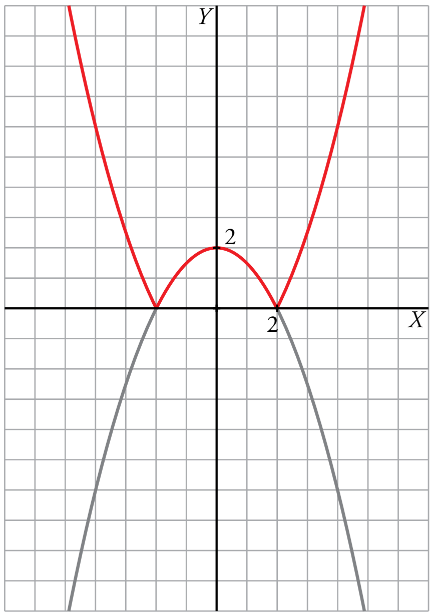
$$f(x) = \begin{cases} 2x - (-x) & \text{si } x < 0 \\ 2x - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

b) Esta función es el valor absoluto de una parábola. Por tanto, su gráfica coincide con la parte positiva de la parábola y con la reflejada de la parte negativa respecto del eje OX.

Para definirla por intervalos, hallamos primero los puntos en los que la parábola vale 0. También tenemos en cuenta los signos de la misma.

$$2 - \frac{x^2}{2} = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0 \rightarrow x = -2;\ x = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} -\left(2 - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x < -2 \\ 2 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -\left(2 - \dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } 2 \leq x \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2 & \text{si } x < -2 \\ 2 - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$



Representamos la gráfica de $f(x)$ (en rojo) a partir de la gráfica de la parábola, reflejando respecto del eje horizontal la parte de la parábola que está por debajo del eje.

Ejercicios y problemas guiados

Página 128

1. Función definida a "trozos"

a) Escribir la expresión analítica de esta función:

b) ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?

a) Está formada por tres trozos, siendo el segundo horizontal.

- Primer trozo: $m = \dfrac{20-10}{5-0} = 2;\ y = 2x + 10$
- Segundo trozo: $y = 20$
- Tercer trozo:

  Pasa por (20, 20) y (25, 0). Luego $m = \dfrac{0-20}{25-20} = -4;\ y = 20 - 4(x-20) \rightarrow y = 100 - 4x$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 20 & \text{si } 5 \le x < 20 \\ 100-4x & \text{si } 20 \le x \end{cases}$$

b) El dominio de definición es el intervalo [0, 25].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

2. Una función cuadrática

Los costes de producción de un cierto producto (en euros) de una empresa, vienen dados por:

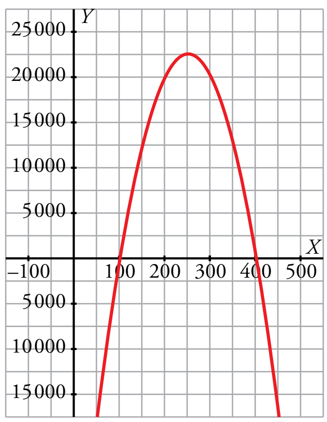
$$C = 40\,000 + 20q + q^2$$

siendo q el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520 euros.

a) Expresar en función de q el beneficio de la empresa y representarlo gráficamente.

b) ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?

a) $B(q) = 520q - (40\,000 + 20q + q^2) = -q^2 + 500q - 40\,000$



b) El beneficio es máximo en el vértice de la parábola anterior, ya que tiene las ramas hacia abajo.

La abscisa del vértice es $\dfrac{-500}{-2} = 250$ y el beneficio será:

$B(250) = -250^2 + 500 \cdot 250 - 40\,000 = 22\,500$ €

3. Una función polinómica

Considerar todos los conos cuya generatriz mide 15 cm.

a) Escribir la función que nos da el volumen del cono según lo que mide su altura, x.

b) ¿Cuál es su dominio de definición?

a) Usando el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$R = \sqrt{15^2 - x^2} = \sqrt{225 - x^2}$$

Luego $V(x) = \dfrac{1}{3}\pi x\left(\sqrt{225 - x^2}\right)^2 = \dfrac{\pi(225x - x^3)}{3}$

b) La altura es un número positivo que no puede ser mayor que la generatriz. Por tanto, el dominio de definición de $V(x)$ es $Dom = (0, 15)$.

4. Funciones lineales

Una empresa de alquiler de coches ofrece dos tarifas:

A: 50 € fijos más 0,25 € por kilómetro recorrido.

B: 0,5 € por kilómetro recorrido.

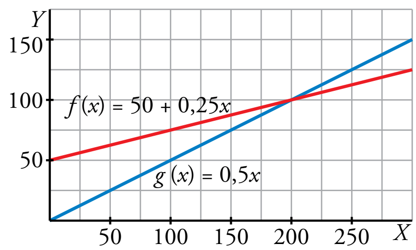
Analizar cuál de las dos opciones es más ventajosa según los kilómetros que vayamos a recorrer.

Si x representa los kilómetros recorridos, las funciones que describen las tarifas son:

A: $f(x) = 50 + 0{,}25x$

B: $g(x) = 0{,}5x$

Representamos ambas funciones.



Podemos hallar el punto de corte analíticamente resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} y = 50 + 0{,}25x \\ y = 0{,}5x \end{array}\right\} \rightarrow x = 200,\ y = 100$$

Observamos que si la distancia es inferior a 200 km, es más ventajosa la opción B. Ocurre lo contrario si recorremos una distancia superior a 200 km, es decir, es más ventajosa la opción A.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 129

Para practicar

Dominio de definición

1 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \dfrac{2}{(x+5)^2}$ **b)** $y = \dfrac{3x+2}{x^3+x}$ **c)** $y = \dfrac{x}{x^2-x+2}$ **d)** $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+2}$

a) La función no está definida cuando $x = -5$. Su dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-5\}$.

b) $x^3 + x = 0$, tiene como única solución $x = 0$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$.

c) La función no está definida cuando $x^2 - x + 2 = 0$, que no tiene solución. Por tanto, el dominio es $Dom = \mathbb{R}$.

d) Las fracciones no se pueden evaluar ni en $x = 0$ ni en $x = -2$. El dominio es $Dom = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$.

2 Estudia el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{2x+5}$ **b)** $y = \sqrt{7-x}$ **c)** $y = \sqrt{x^2+3x+4}$ **d)** $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}$

a) Para que esté definida debe ser $2x + 5 \geq 0$, cuya solución es $\left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$. Su dominio es este intervalo, $Dom = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right)$.

b) En este caso $x \leq 7$. El dominio de definición es $Dom = (-\infty, 7]$.

c) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \;\rightarrow\; Dom = \mathbb{R}$

d) Para que ambas raíces existan simultáneamente debe cumplirse a la vez que $x \geq 1$ y $x \geq 2$. El dominio es $Dom = [2, +\infty)$.

3 Di cuál es el dominio de definición de:

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **c)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ **d)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$

a) El radicando no puede ser negativo ni tampoco 0 en este caso. Por tanto,

$4 - x > 0 \;\rightarrow\; Dom = (-\infty, 4)$.

b) Análogamente, $x^2 + 1 > 0 \;\rightarrow\; Dom = \mathbb{R}$ porque en el primer miembro sumamos al número 1 (que es positivo) una potencia par (que nunca es negativa).

c) Resolvemos $x^2 - 3x > 0$ mediante la tabla de los signos del polinomio.

$x^2 - 3x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 3$

	$(-\infty, 0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNO DE $x^2 - 3x$	+	–	+

Por tanto, $Dom = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

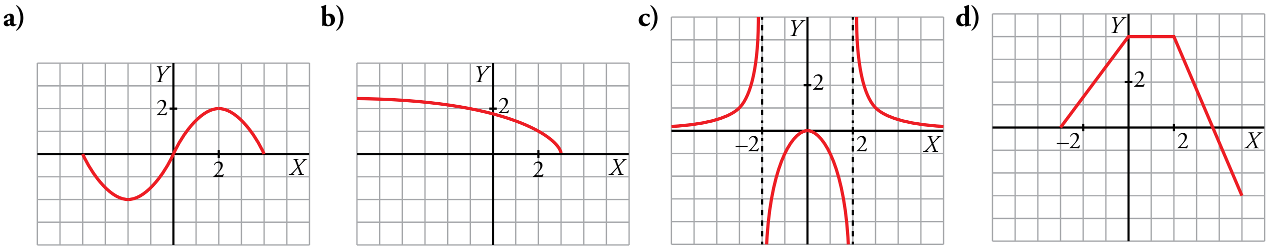
d) $9 - x^2 > 0$ y resolvemos construyendo la tabla de los signos:

$9 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -3,\; x = 3$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, +\infty)$
SIGNO DE $9 - x^2$	–	+	–

Por tanto, $Dom = (-3, 3)$.

4 **Observa las gráficas de estas funciones e indica cuál es su dominio de definición y su recorrido:**



a) Dominio: $[-4, 4]$ Recorrido: $[-2, 2]$

b) Dominio: $(-\infty, 3]$ Recorrido: $[0, +\infty)$

c) Dominio: $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ Recorrido: $\mathbb{R}$

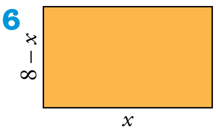
d) Dominio: $[-3, 5]$ Recorrido: $[-3, 4]$

5 **La función $h(t) = 80 + 64t - 16t^2$ nos da la altura a la que está una pelota lanzada hacia arriba en el instante t, hasta que vuelve al suelo. ¿Cuál es su dominio de definición?**

Necesitamos calcular el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo. Para ello es necesario resolver la ecuación:

$80 + 64t - 16t^2 = 0$, que tiene una solución posible, $t = 5$.

Como el tiempo no puede ser negativo, el dominio es $Dom = [0, 5]$.

6 

Escribe el área de este rectángulo de perímetro 16 cm en función de su base x.

¿Cuál es el dominio de definición de esa función? ¿Y su recorrido?

La función área es $A(x) = x(8 - x) = 8x - x^2$, que es un función cuadrática.

Su dominio es $Dom = (0, 8)$.

El valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-8}{-2} = 4$. Este valor es $A(4) = 16$. Por tanto, el recorrido de la función es el intervalo $(0, 16]$.

7 **La temperatura de un paciente, desde que comienza su enfermedad hasta que vuelve a tener 37 °C ha evolucionado según la función $T = -0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37$, siendo t el número de días transcurridos desde el inicio de la enfermedad. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Y su recorrido?**

Calculamos los días en los que tiene 37 °C.

$-0{,}1t^2 + 1{,}2t + 37 = 37 \rightarrow t_1 = 0,\ t_2 = 12$

Es decir, a los 12 días vuelve a tener 37 °C de temperatura. El dominio es el intervalo $[0, 12]$.

Como se trata de una función cuadrática con las ramas hacia abajo, el valor máximo lo alcanza en el vértice, cuya abscisa es $\frac{-1{,}2}{-0{,}2} = 6$.

La temperatura máxima es $-0{,}1 \cdot 6^2 + 1{,}2 \cdot 6 + 37 = 40{,}6$ °C.

En consecuencia, el recorrido es el intervalo $[37;\ 40{,}6]$.

Funciones lineales y cuadráticas. Interpolación

8 **Escribe las ecuaciones de las siguientes rectas y represéntalas gráficamente:**

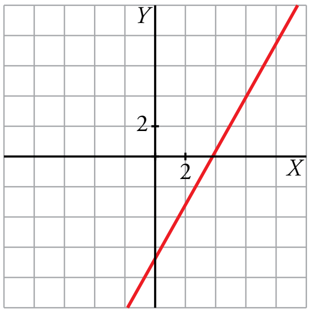
a) Pasa por $P(1, -5)$ y $Q(10, 11)$.

b) Pasa por (–7, 2) y su pendiente es –0,75.

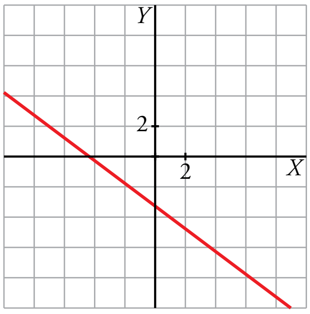
c) Corta a los ejes en (3,5; 0) y (0, –5).

d) Es paralela a la recta $3x - y + 1 = 0$ y pasa por (–2, –3).

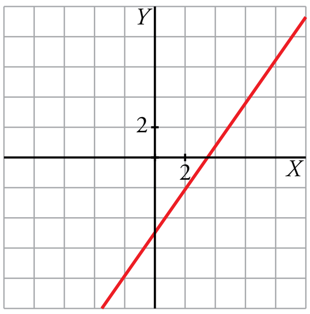
a) $m = \dfrac{11-(-5)}{10-1} = \dfrac{16}{9}$ $\qquad y = -5 + \dfrac{16}{9}(x-1) \rightarrow y = \dfrac{16x-61}{9}$



b) $y = 2 - 0{,}75[x - (-7)] \rightarrow y = -0{,}75x - 3{,}25$

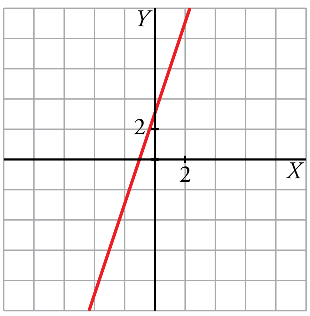


c) $m = \dfrac{-5-0}{0-3{,}5} = \dfrac{5}{3{,}5} = \dfrac{10}{7}$ $\qquad y = \dfrac{10}{7}x - 5$

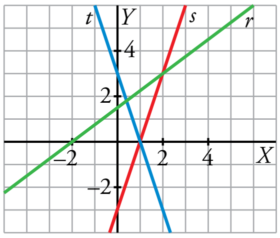


d) $3x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 3x + 1$

La pendiente de la recta buscada es 3 para que sea paralela a la recta dada. Por tanto, la ecuación es $y = -3 + 3[x - (-2)] \rightarrow y = 3x + 3$.



9 **Calcula la pendiente de las rectas r, s y t y escribe su ecuación.**



- Recta r:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{3}{4} \\ \text{Pasa por } (-2, 0) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = \frac{3}{4}(x+2) \to y = \frac{3x+6}{4}.$$

- Recta s:

$$\left.\begin{array}{l} m = 3 \\ \text{Pasa por } (0, -3) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = 3x - 3.$$

- Recta t:

$$\left.\begin{array}{l} m = -3 \\ \text{Pasa por } (0, 3) \end{array}\right\} \to \text{La ecuación de la recta es } y = -3x + 3.$$

10 **Calcula, mediante interpolación o extrapolación lineal, los valores de y que faltan en cada tabla:**

a)

x	0,45	0,5	0,6
y	2	…	0,25

b)

x	47	112	120
y	18	37	…

a) $y = 2 - 11,\widehat{6}(x - 0,45) \to y_0 = 2 - 11,\widehat{6}(0,5 - 0,45) = 1,42$

b) $y = 18 + 0,292(x - 47) \to y_0 = 18 + 0,292(120 - 47) = 39,32$

11 **Esta tabla muestra la temperatura atmosférica tomada a diferentes alturas:**

ALTURA (m)	0	500	1 000	1 500
TEMPERATURA (°C)	15	11,7	8,4	5,1

Calcula la temperatura a 1 200 m y a 2 000 m.

$y = 15 - 0,0066x \to f(1\,200) = 15 - 0,0066 \cdot 1\,200 = 7,08$

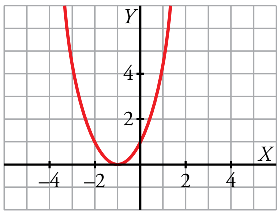
$f(2\,000) = 15 - 0,0066 \cdot 2\,000 = 1,8$

12 Representa las siguientes funciones:

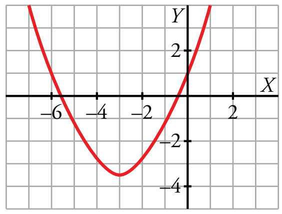
a) $y = x^2 + 2x + 1$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{2} + 3x + 1$ **c)** $y = -x^2 + 3x - 5$

d) $y = \dfrac{x^2}{3} + 3x + 6$ **e)** $y = -4x^2 + 1$ **f)** $y = -2x^2 - 3x + 0{,}5$

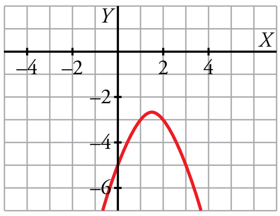
a)



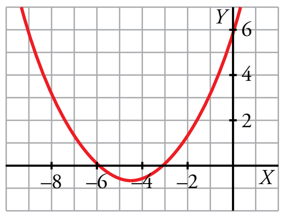
b)



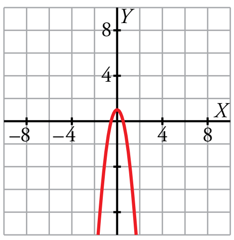
c)



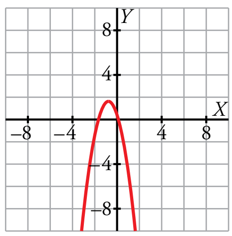
d)



e)



f)



13 Halla la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $(-2, -9)$, $(2, -5)$ y $(4\ , 0)$.

a) Utilizando la expresión $y = ax^2 + bx + c$.

b) Por el método de Newton.

a) $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (-2,-9) \to -9 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \to 4a - 2b + c = -9 \\ (2,-5) \to -5 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \to 4a + 2b + c = -5 \\ (4,0) \to 0 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \to 16a + 4b + c = 0 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema: $a = \dfrac{1}{4}$, $b = 1$, $c = -8$

La parábola buscada es $y = \dfrac{x^2}{4} + x - 8$.

b) $y = p + m(x + 2) + n(x + 2)(x - 2)$

$(-2, -9) \to -9 = p + m \cdot (-2 + 2) + n \cdot (-2 + 2)(-2 - 2) \to p = -9$

$(2, -5) \to -5 = -9 + m \cdot (2 + 2) + n \cdot (2 + 2)(2 - 2) \to 4m = 4 \to m = 1$

$(4, 0) \to 0 = -9 + (4 + 2) + n \cdot (4 + 2)(4 - 2) \to 0 = -3 + 12n \to n = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

La parábola buscada es:

$$y = -9 + (x + 2) + \frac{1}{4}(x + 2)(x - 2) = -9 + x + 2 + \frac{1}{4}(x^2 - 4) = \frac{x^2}{4} + x - 8$$

14 **Halla, en cada caso, la ecuación de la parábola que pasa por los puntos dados:**

a) (1, –1), (3, 3), (5, –1)

b) (0, –4), (1, –6), (3, –4)

Completa los puntos (4, …) y (–3, …) para que pertenezcan a cada una de las parábolas anteriores.

a) Usando la ecuación general: $y = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{array}{l} (1,-1) \to -1 = a+b+c \to a+b+c=-1 \\ (3,3) \to 3 = a\cdot 3^2+b\cdot 3+c \to 9a+3b+c=3 \\ (5,-1) \to -1 = a\cdot 5^2+b\cdot 5+c \to 25a+5b+c=-1 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema: $a = -1,\ b = 6,\ c = -6$

La parábola buscada es $y = -x^2 + 6x - 6$.

Los puntos (4, 2) y (–3, –33) pertenecen a esta parábola.

b) Por el método de Newton: $y = p + m(x-0) + n(x-0)(x-1) = p + mx + nx(x-1)$

$(0,-4) \to -4 = p + m\cdot 0 + n\cdot 0(0-1) \to p = -4$

$(1,-6) \to -6 = -4 + m\cdot 1 + n\cdot 1(1-1) \to m = -2$

$(3,-4) \to -4 = -4 - 2\cdot 3 + n\cdot 3(3-1) \to 6n = 6 \to n = 1$

La parábola buscada es:

$y = -4 - 2x + x(x-1) = -4 - 2x + x^2 - x = x^2 - 3x - 4$

Los puntos (4, 0) y (–3, 14) pertenecen a esta parábola.

Página 130

Representación de funciones elementales

15 **Asocia a cada gráfica su expresión analítica.**

a) $y = -0{,}5x^2 + 3$

b) $y = \sqrt{x+2}$

c) $y = 3x^2 + 5x - 1$

d) $y = \dfrac{1}{x} + 2$

e) $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{3}$

f) $y = -\sqrt{-x}$

a) IV

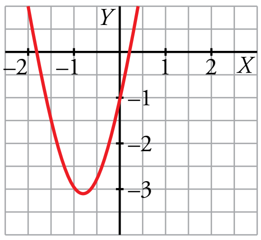
b) III

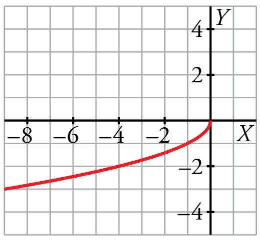
c) I

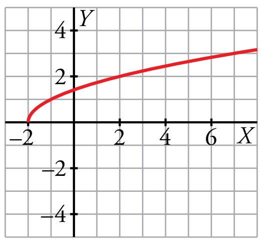
d) VI

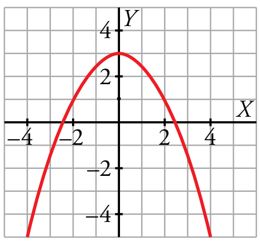
e) V

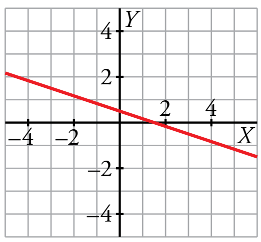
f) II

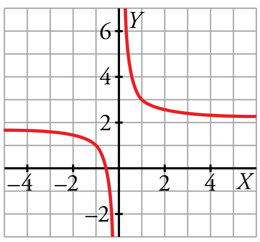
I


II


III


IV


V


VI


16 **Representa las siguientes funciones:**

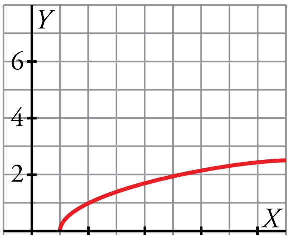
a) $y = \sqrt{x-1}$

b) $y = -\sqrt{x+3}$

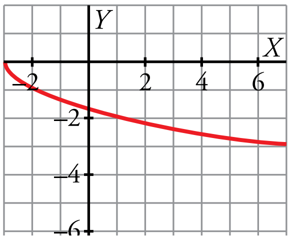
c) $y = 2 + \sqrt{x}$

d) $y = 1 - \sqrt{x}$

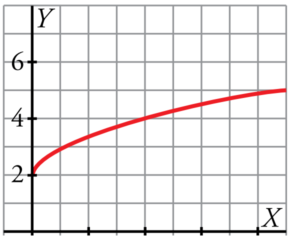
a)



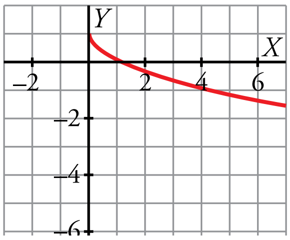
b)



c)



d)



17 **Representa las siguientes funciones:**

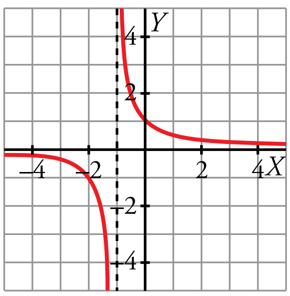
a) $y = \dfrac{1}{x+1}$

b) $y = \dfrac{1}{x-1}$

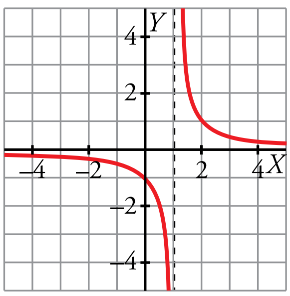
c) $y = \dfrac{-1}{x}$

d) $y = \dfrac{-1}{x-3}$

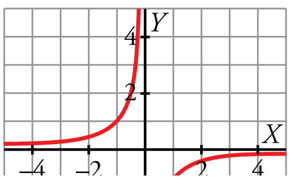
a)



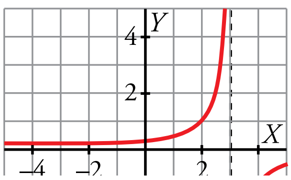
b)



c)



d)



18 Representa estas funciones en el intervalo indicado:

a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$

b) $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \geq -1$

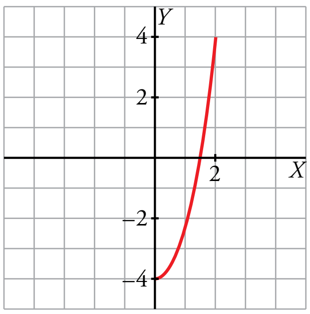
c) $y = \dfrac{1}{x},\ x < 0$

d) $y = \dfrac{3x - 30}{5},\ [-5, 5]$

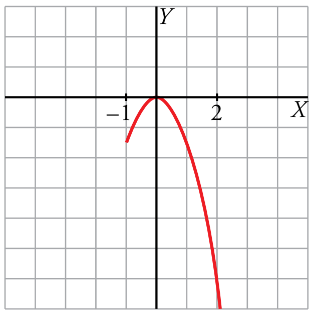
e) $y = \dfrac{1}{x-2},\ [-2, 2)$

f) $y = \sqrt{x},\ [0, 1]$

a) $y = 2x^2 - 4,\ [0, 2]$

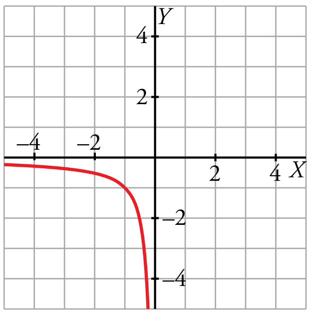


b) $y = -\dfrac{3x^2}{2},\ x \geq -1$



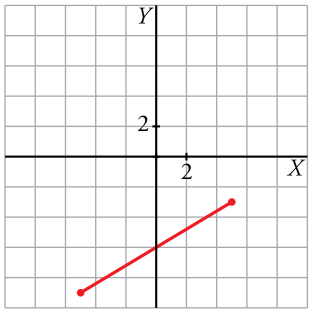
c) $y = \dfrac{1}{x},\ x < 0$

Se trata de una rama de la función de proporcionalidad inversa y su gráfica es:

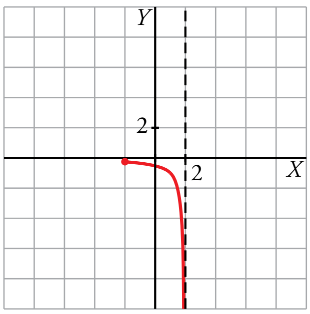


d) $y = \dfrac{3x - 30}{5},\ [-5, 5]$

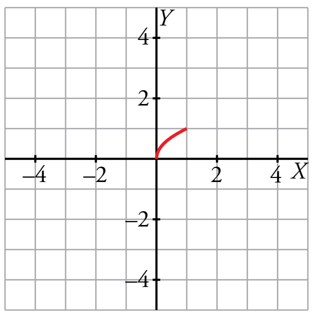
Es un trozo de una función lineal.



e) $y = \dfrac{1}{x-2}$



f) $y = \sqrt{x},\ [0, 1]$



Funciones definidas "a trozos"

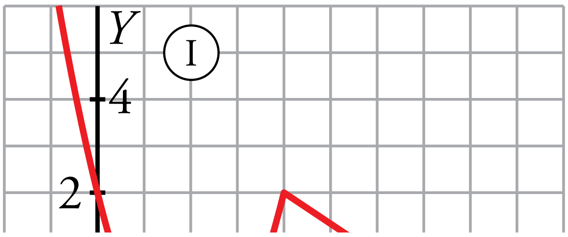
19 **Asocia a cada gráfica su expresión analítica:**

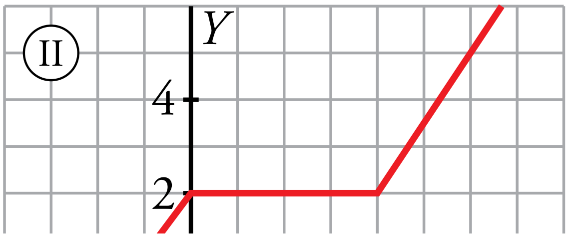
a) $y = \begin{cases} 2 - \dfrac{2x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 8 - \dfrac{3x}{2} & \text{si } x > 4 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} -(x+2)^2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 2 & \text{si } x < 4 \\ \dfrac{14 - 2x}{3} & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 2 + \dfrac{4x}{3} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ \dfrac{3x}{2} - 4 & \text{si } x > 4 \end{cases}$



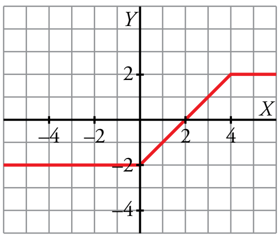


a) III b) IV c) I d) II

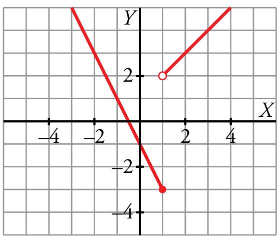
20 **Representa gráficamente las siguientes funciones:**

a) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x < 2 \\ 2x - 4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2} + 2 & \text{si } x \le 3 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

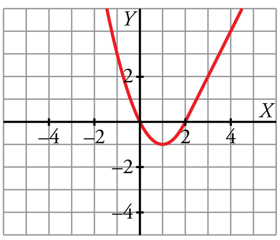
a)



b) Construimos una tabla de valores para cada recta y obtenemos la gráfica.



c) Hallamos el vértice de la parábola, (1, –1), y los puntos de corte, (0, 0) y (2, 0) (primer trozo). Construimos una tabla de valores para el segundo trozo y obtenemos:



d) La función está formada por un trozo de parábola abierta hacia abajo y un trozo de recta.

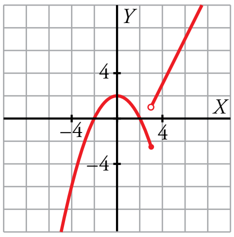
- 1.ª rama:

  Su vértice es el punto (0, 2) y corta al eje horizontal en los puntos de abscisas $x = -2$, $x = 2$.

  Evaluamos en el punto de ruptura: $x = 3 \to y = \frac{-3^2}{2} + 2 = -\frac{5}{2}$

- 2.ª rama:

  Es un trozo de recta que podemos representar hallando dos puntos por los que pasa.

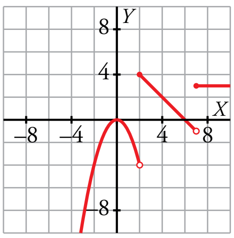


21 **Representa.**

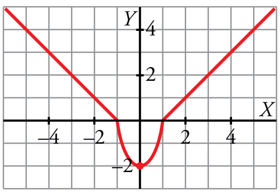
a) $y = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 2 \\ -x + 6 & \text{si } 2 \le x < 7 \\ 3 & \text{si } x \ge 7 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le -1 \\ 2x^2 - 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ c) $y = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x \le 0 \\ -\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) • 1.ª rama: parábola abierta haca abajo, cuya gráfica es la reflejada de $y = x^2$ respecto del eje *OX*.

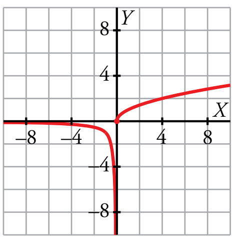
- 2.ª rama: trozo de recta que podemos representar hallando dos puntos por los que pasa.
- 3.ª rama: trozo de función constante.



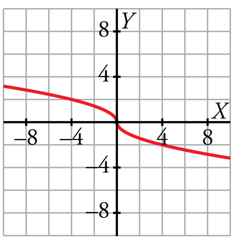
b)



c) Los dos trozos son partes de gráficas representadas en ejercicios anteriores.

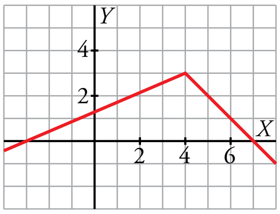


d) Son dos trozos de función raíz situados a ambos lados del origen de coordenadas.

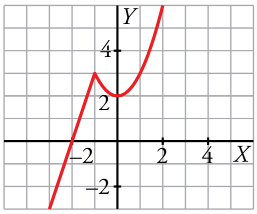


22 **Obtén la expresión analítica de estas funciones:**

a)



b)



a) El primer trozo pertenece a una recta que pasa por los puntos (–3, 0) y (4, 3). Hallamos su ecuación:

$$m = \frac{3-0}{4-(-3)} = \frac{3}{7} \rightarrow y = \frac{3}{7}(x+3) = \frac{3x+9}{7}$$

El segundo trozo pertenece a una recta que pasa por los puntos (7, 0) y (4, 3). Hallamos su ecuación:

$$m = \frac{3-0}{4-7} = -1 \rightarrow y = -(x-7) = 7-x$$

Por tanto, la función es:

$$y = \begin{cases} \dfrac{3x+9}{7} & \text{si } x < 4 \\ 7-x & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

b) El primer trozo pertenece a una recta de pendiente 3 y que pasa por el punto (–2, 0). Su ecuación es $y = 3(x+2)$.

El segundo trozo forma parte de la parábola $y = x^2$ desplazada 2 unidades hacia arriba. Por tanto, la función es:

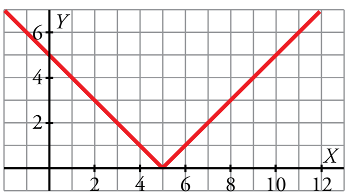
$$y = \begin{cases} 3x+6 & \text{si } x < -1 \\ x^2+2 & \text{si } -1 \le x \end{cases}$$

Página 131

Valor absoluto de una función

23 **Representa la función $y = |x-5|$ y comprueba que su expresión analítica en intervalos es:**

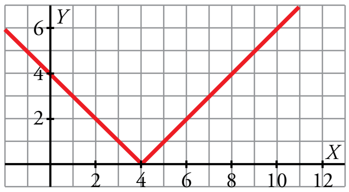
$$y = \begin{cases} -x+5 & \text{si } x < 5 \\ x-5 & \text{si } x \ge 5 \end{cases}$$



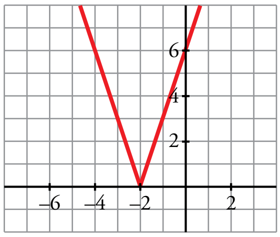
24 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones "a trozos":**

a) $y = |4 - x|$ **b)** $y = |3x + 6|$ **c)** $y = \left|\dfrac{x-3}{2}\right|$ **d)** $y = |-x - 1|$

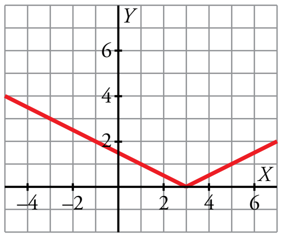
a) $y = \begin{cases} 4 - x & \text{si } x < 4 \\ -4 + x & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$



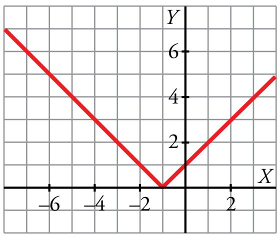
b) $y = \begin{cases} -3x - 6 & \text{si } x < -2 \\ 3x + 6 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$



c) $y = \begin{cases} -\dfrac{x-3}{2} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x-3}{2} & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$



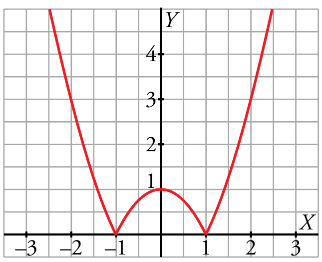
d) $y = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x < -1 \\ x + 1 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$



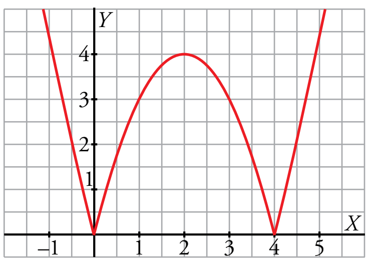
25 **Representa estas funciones:**

a) $y = |x^2 - 1|$ **b)** $y = |x^2 - 4x|$ **c)** $y = |x^2 + 2x - 3|$ **d)** $y = |x^2 - 2x + 1|$

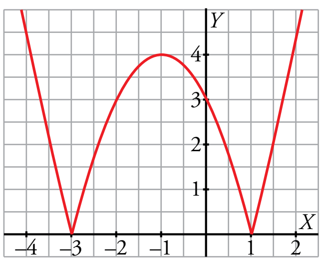
a)



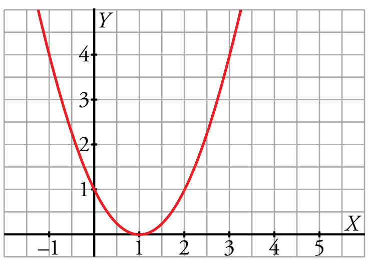
b)



c)



d)



26 **Representa.**

a) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

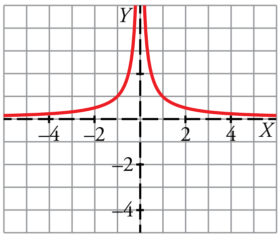
b) $y = 1 + |x|$

c) $y = \dfrac{|x|}{x}$

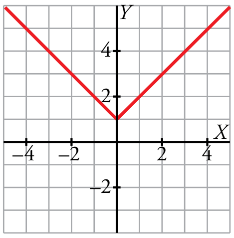
d) $y = 2|x| + x$

La función valor absoluto de $f(x)$ mantiene la parte positiva de la gráfica y convierte la parte negativa de $f(x)$ en $-f(x)$, es decir, en la simétrica de $f(x)$ respecto del eje horizontal.

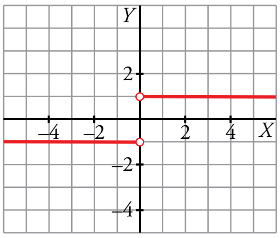
a)



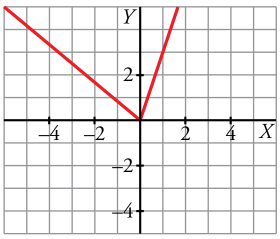
b) La gráfica de esta función es la de $y = |x|$ desplazada una unidad hacia arriba.



c) $y = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



d) $y = 2|x| + x = \begin{cases} 2(-x) + x & \text{si } x < 0 \\ 2x + x & \text{si } x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 3x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

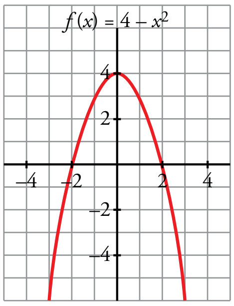


Transformaciones de una función

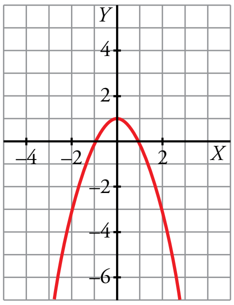
27 **Representa $f(x) = 4 - x^2$ y, a partir de ella, representa:**

a) $g(x) = f(x) - 3$

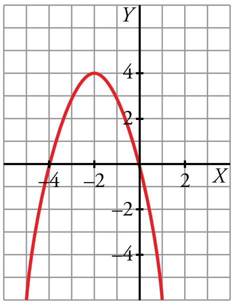
b) $h(x) = f(x + 2)$



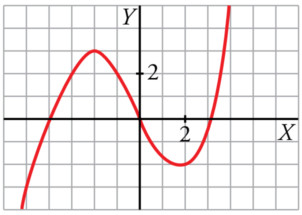
a)



b)



28 **Esta es la gráfica de la función $y = f(x)$:**

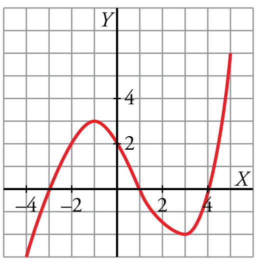


Representa, a partir de ella, las funciones:

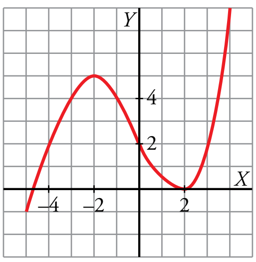
a) $y = f(x - 1)$

b) $y = f(x) + 2$

a)

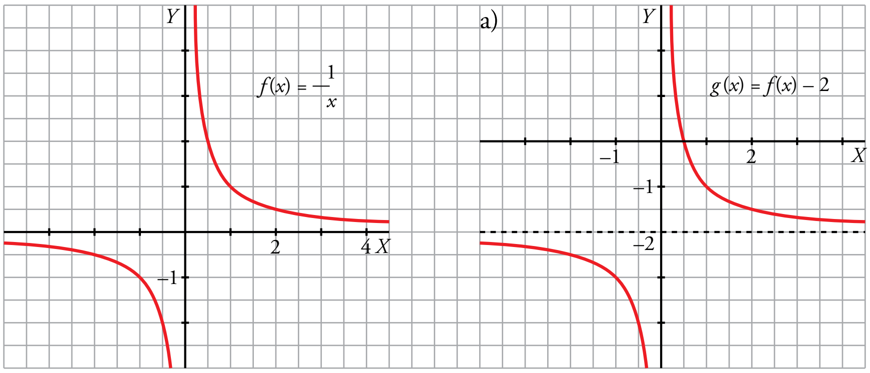


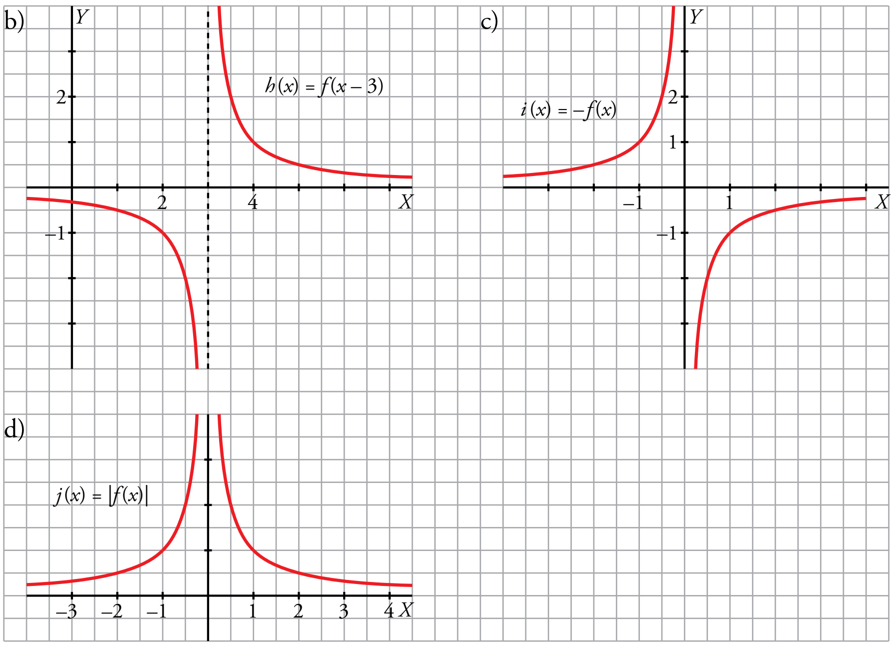
b)



29 **A partir de la gráfica de $f(x) = 1/x$, representa:**

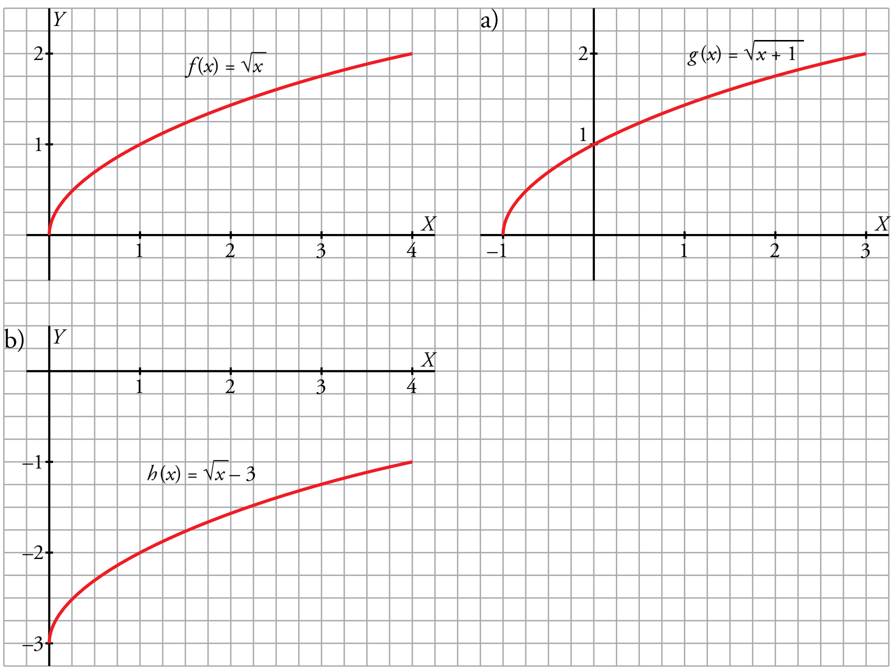
a) $g(x) = f(x) - 2$ b) $h(x) = f(x - 3)$ c) $i(x) = -f(x)$ d) $j(x) = |f(x)|$





30 **Representa la función $f(x) = \sqrt{x}$ y dibuja a partir de ella:**

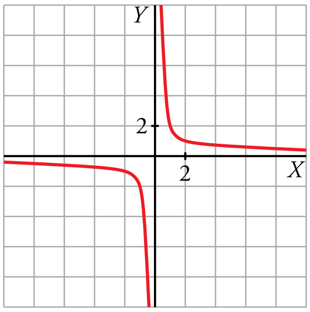
a) $g(x) = f(x + 1)$ b) $h(x) = f(x) - 3$



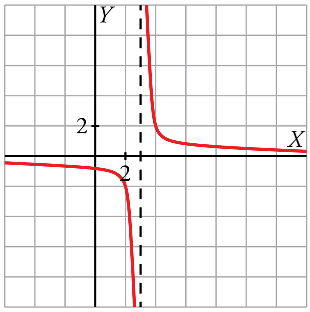
31 **Representa sucesivamente:**

$$y = \frac{2}{x};\quad y = \frac{2}{x-3};\quad y = \frac{2}{x} + 1;\quad y = -\frac{2}{x-3}$$

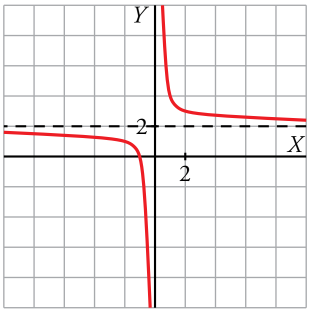
$y = \dfrac{2}{x}$



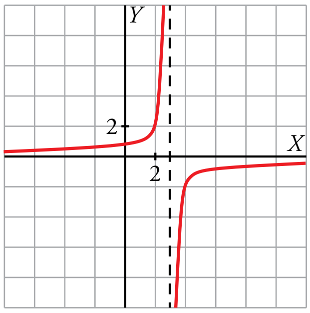
$y = \dfrac{2}{x-3}$



$y = \dfrac{2}{x} + 1$



$y = -\dfrac{2}{x-3}$



32 **A partir de la gráfica de** $f(x) = x^2$, **representa:**

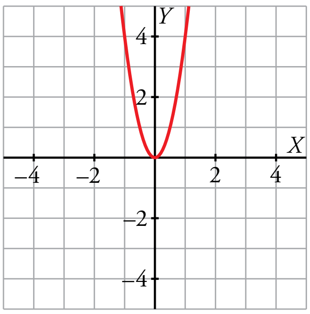
a) $y = f(2x)$

b) $y = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$

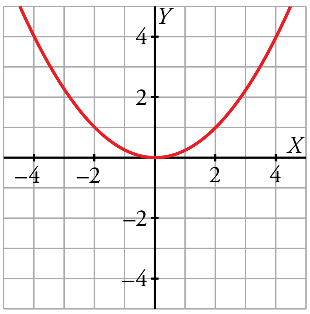
c) $y = 3f(x)$

d) $y = \dfrac{f(x)}{2}$

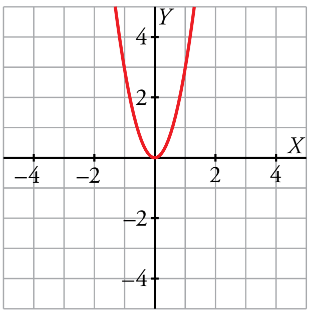
a)



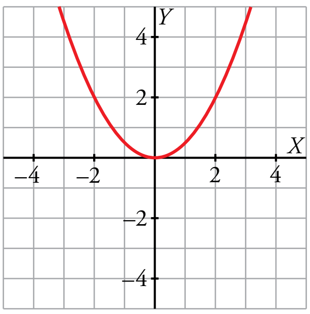
b)



c)



d)



Para resolver

33 El porcentaje de hogares españoles que tenían teléfono móvil era, en 2006, del 80,5% y en 2009, del 88,2 %. Estimar el porcentaje que había en 2008.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (2 006; 80,5) y (2 009; 88,2):

$$m = \frac{88,2-80,5}{2009-2006} = \frac{7,7}{3} = \frac{77}{30} \to y = 80,5 + \frac{77}{30}(x-2006)$$

Evaluamos en 2 008 y obtenemos la estimación pedida:

$$x = 2008 \to y = 80,5 + \frac{77}{30}(2008-2006) = 85,6$$

En 2008, el 85,6 % de los hogares españoles tenían teléfono móvil.

34 El precio del billete de una línea de cercanías depende de los kilómetros recorridos. Por 57 km he pagado 2,85 euros, y por 168 km, 13,4 euros. Calcula el precio de un billete para una distancia de 100 km.

$y = 2,85 + 0,095(x-57)$

$y(100) = 6,94$ euros.

35 Con unos gastos en publicidad de 3 000 €, las ventas obtenidas por una empresa han sido de 28 000 €; y con 5 000 € invertidos en publicidad, las ventas han ascendido a 39 000 €.

a) Estima, mediante interpolación lineal, cuáles serían las ventas si se invirtieran 4 000 € en publicidad.

b) Si sabemos que con un gasto de 6 000 € se han obtenido unas ventas de 40 000 €, estima mediante interpolación parabólica las ventas que se obtendrían invirtiendo 4 000 € en publicidad.

a) Para mayor comodidad trabajaremos en miles de euros.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3, 28) y (5, 39):

$$m = \frac{39-28}{5-3} = \frac{11}{2} \to y = 28 + \frac{11}{2}(x-3)$$

Evaluamos en $x = 4$ y obtenemos la estimación pedida:

$$x = 4 \to y = 28 + \frac{11}{2} = 33,5$$

Si se invirtieran 4 000 € en publicidad, se estimarían unas ventas de 33 500 €.

b) Buscamos una parábola que pase por los puntos (3, 28), (5, 39) y (6, 40).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-3) + n(x-3)(x-5)$

Pasa por (3, 28) $\to$ $28 = p$

Pasa por (5, 39) $\to$ $39 = p + m(5-3)$ $\to$ $39 = p + 2m$

Pasa por (6, 40) $\to$ $40 = p + m(6-3) + n(6-3)(6-5)$ $\to$ $40 = p + 3m + 3n$

Obtenemos las soluciones: $p = 28, \ m = \frac{11}{2}, \ n = -\frac{3}{2}$

Ecuación de la parábola: $y = 28 + \frac{11}{2}(x-3) - \frac{3}{2}(x-3)(x-5)$

$$y(4) = 28 + \frac{11}{2} - \frac{3}{2}(-1) = 28 + \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = 35$$

Si se invirtieran 4 000 € en publicidad, se estimarían unas ventas de 35 000 €.

36 **Midiendo la temperatura a diferentes alturas, se ha observado que por cada 180 m de ascenso el termómetro baja 1 °C. Si en la base de una montaña de 800 m estamos a 10 °C, ¿cuál será la temperatura en la cima?**

Representa gráficamente la función *altura-temperatura* y busca su expresión analítica.

Llamamos x a la altura respecto de la base de la montaña. La función que describe la temperatura en función de la altura es una función lineal que pasa por los puntos (0, 10) y (180, 9). Por tanto:

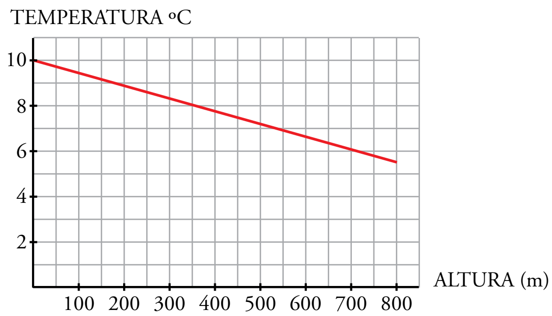
$$m = \frac{9-10}{180} = -\frac{1}{180} \to y = -\frac{1}{180}x + 10$$

Para obtener la altura en la cima evaluamos en 800.

$$x = 800 \to y = -\frac{1}{180} \cdot 800 + 10 = 5,56$$

La temperatura en la cima es de 5,56 ºC.

Representamos la función $y = -\frac{1}{180}x + 10$:



37 **En la cocina de un restaurante, un equipo de 2 cocineros es capaz de preparar los pedidos para 30 comensales. Si el equipo es de 4 cocineros la capacidad se eleva hasta los 50 comensales. Y si el equipo llega a 8 cocineros, se estorbarían unos a otros y no habría fuegos para todos, por lo que la capacidad se mantendría en 50 comensales. Estima mediante interpolación parabólica cuántos comensales podría atender un equipo de 5 cocineros.**

Buscamos una parábola que pase por los puntos (2, 30), (4, 50) y (8, 50).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-2) + n(x-2)(x-4)$

Pasa por (2, 30) $\to$ $30 = p$

Pasa por (4, 50) $\to$ $50 = p + m(4-2) \to 50 = p + 2m$

Pasa por (8, 50) $\to$ $50 = p + m(8-2)(8-4) \to 50 = p + 6m + 24n$

Obtenemos las soluciones: $p = 30,\ m = 10,\ n = -\frac{5}{3}$

Ecuación de la parábola: $y = 30 + 10(x-2) - \frac{5}{3}(x-2)(x-4)$

$y(5) = 30 + 30 - 5 = 55$

Cinco cocineros podrían atender a 55 comensales.

38 **Un opositor se enfrenta a un temario de 3 100 páginas. Sabe que si estudia 4 horas diarias es capaz de memorizar 4 páginas por día. Si dedica 8 horas, aprende 7 páginas; y si dedica 12 horas, consigue 9 páginas. Se plantea una jornada diaria de 10 horas y quiere saber el número de días que le va a suponer dar una primera vuelta al temario completo. Utiliza la interpolación parabólica para responderle.**

Buscamos una parábola que pase por los puntos (4, 4), (8, 7) y (12, 9).

Ecuación de la parábola: $y = p + m(x-4) + n(x-4)(x-8)$

Pasa por (4, 4) $\to$ $4 = p$

Pasa por (8, 7) $\to$ $7 = p + m(8-4) \to 7 = p + 4m$

Pasa por (12, 9) $\rightarrow$ $9 = p + m(12-4) + n(12-4)(12-8)$ $\rightarrow$ $9 = p + 8m + 32n$

Obtenemos las soluciones: $p = 4$, $m = \dfrac{3}{4}$, $n = -\dfrac{1}{32}$

Ecuación de la parábola: $y = 4 + \dfrac{3}{4}(x-4) - \dfrac{1}{32}(x-4)(x-8)$

$y(10) = 4 + \dfrac{3}{4} \cdot 6 - \dfrac{1}{32} \cdot 12 = \dfrac{65}{8}$

$3\,100 : \dfrac{65}{8} = 381{,}54$

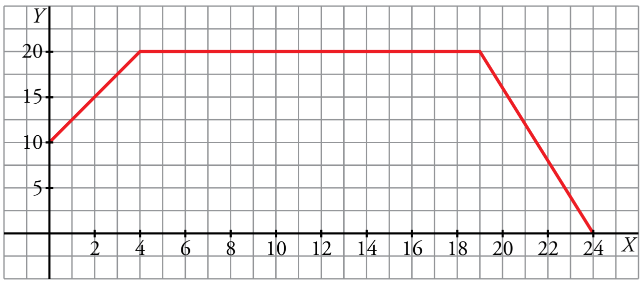
Para dar una vuelta a las 3 100 páginas, con jornadas de 10 horas, necesita, aproximadamente, 382 días.

39 La dosis de un fármaco comienza con 10 mg y cada día debe aumentar 2 mg hasta llegar a 20 mg. Se debe seguir 15 días con esa cantidad y a partir de entonces ir disminuyendo 4 mg cada día.

a) Representa la función que describe este enunciado y determina su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

a) En el 5.º día la dosis alcanza los 20 mg y este ya es el primero de los 15 días de tratamiento con la dosis máxima. Por tanto, el 19.º día es el último que toma 20 mg.



La expresión es $f(x) = \begin{cases} 10 + 2x & \text{si } 0 \le x \le 5 \\ 20 & \text{si } 5 < x \le 19 \\ 96 - 4x & \text{si } 19 < x \end{cases}$

b) El dominio es el intervalo [0, 24].

El recorrido es el intervalo [0, 20].

Página 132

40 En las funciones de oferta y demanda, se llama *cantidad de equilibrio* al número de unidades que hay que producir para que la oferta y la demanda se igualen, $o(x) = d(x)$; y se llama *precio de equilibrio* al precio con el cual se consigue esa igualdad.

a) Halla el precio y la cantidad de equilibrio de un producto cuyas funciones de oferta y demanda son $o(x) = 2{,}5x - 100$ y $d(x) = 300 - 1{,}5x$ (x en euros, d y o en miles de unidades del producto).

b) Si el precio del producto es de 80 €, ¿habrá escasez o exceso del mismo? ¿Y si el precio fuese de 120 €?

c) ¿Cuál sería el precio y la cantidad de equilibrio si las funciones de oferta y demanda fuesen $o(x) = 0{,}25x^2 - 100$ y $d(x) = 185 - 2x$?

a) $o(x) = d(x)$ $\rightarrow$ $2{,}5x - 100 = 300 - 1{,}5x$ $\rightarrow$ $x = 100$ € es el precio de equilibrio.

La cantidad de equilibrio es $o(100) = d(100) = 300 - 1{,}5 \cdot 100 = 150$ miles de unidades.

b) Si $x = 80$, hay escasez, porque la demanda supera a la oferta. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 80 - 100 = 100$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 80 = 180$

Si $x = 120$, hay exceso, porque la oferta supera a la demanda. En efecto:

$o(80) = 2{,}5 \cdot 120 - 100 = 200$

$d(80) = 300 - 1{,}5 \cdot 120 = 120$

c) $o(x) = d(x) \rightarrow 0{,}25x^2 - 100 = 185 - 2x$ da lugar a una única solución posible: $x = 30$ €.

La cantidad de equilibrio es $o(30) = d(30) = 125$ miles de unidades.

41 El coste de producción de x unidades de un producto es igual a $(1/4)x^2 + 35x + 25$ euros y el precio de venta de una unidad es $50 - (x/4)$ euros.

a) Escribe la función que nos da el beneficio total si se venden las x unidades producidas, y represéntala.

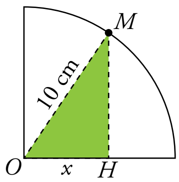
b) Halla el número de unidades que deben venderse para que el beneficio sea máximo.

a) $B(x) = 50x - \dfrac{x^2}{4} - \left(\dfrac{1}{4}x^2 + 35x + 25\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 15x - 25$

b) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola: $x = \dfrac{-15}{-1} = 15$.

Deben venderse 15 unidades.

42 En un cuarto de circunferencia de 10 cm de radio tomamos un punto M y construimos el triángulo rectángulo OMH.



Expresa el área de ese triángulo según la medida del cateto x. ¿Cuál es su dominio de definición?

Utilizando el teorema de Pitágoras, $\overline{MH} = \sqrt{100 - x^2}$

El área del triángulo es la función $A(x) = \dfrac{x\sqrt{100 - x^2}}{2}$ y su dominio es el intervalo $(0, 10)$ para que la construcción tenga sentido.

43 Un fabricante vende mensualmente 100 electrodomésticos a 400 euros cada uno y sabe que por cada 10 euros de subida venderá 2 electrodomésticos menos.

a) ¿Cuáles serán los ingresos si sube los precios 50 euros?

b) Escribe la función que relaciona la subida de precio con los ingresos mensuales.

c) ¿Cuál debe ser la subida para que los ingresos sean máximos?

a) En este caso vendería 90 electrodomésticos a 450 euros cada uno; luego los ingresos serían de $450 \cdot 90 = 40\,500$ euros.

b) $I(x) = (400 + 10x)(100 - 2x) = -20x^2 + 200x + 40\,000$

c) El máximo se alcanza en el vértice de la parábola:

$x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-200}{-40} = 5 \rightarrow 5$ euros

44 **Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0{,}1x^2 + 2{,}5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto.**

a) Representa la función.

b) Calcula la cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

c) ¿Cuántas toneladas se han de vender para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

a) La función es una parábola abierta hacia abajo.

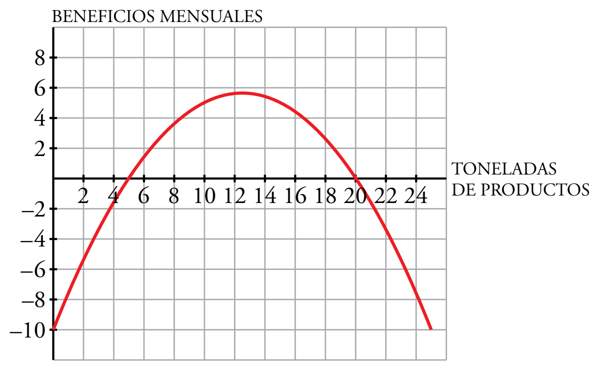
Su vértice es: $x_0 = \dfrac{-2{,}5}{-0{,}2} = 12{,}5 \rightarrow f(12{,}5) = -0{,}1 \cdot 12{,}5^2 + 2{,}5 \cdot 12{,}5 - 10 = 5{,}625$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX para saber para qué valores no se obtienen beneficios.

$y = 0 \rightarrow -0{,}1 \cdot x^2 + 2{,}5x - 10 = 0 \rightarrow x = 5,\ x = 20$

Corta al eje vertical en el punto $x = 0 \rightarrow f(0) = -10$.

Su gráfica es:



b) Debe vender, como mínimo, 5 toneladas de producto para no tener pérdidas.

c) El beneficio máximo lo obtiene vendiendo 12,5 toneladas de producto y es de 5 625 €.

45 **Una discoteca abre a las 10 de la noche y cierra cuando se van todos los clientes. La función que nos da el número de cliente, N, según el número de horas que lleva abierta, t, es $N(t) = 80t - 10t^2$.**

a) Representa la función.

b) ¿A qué hora el número de clientes es máximo?

c) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

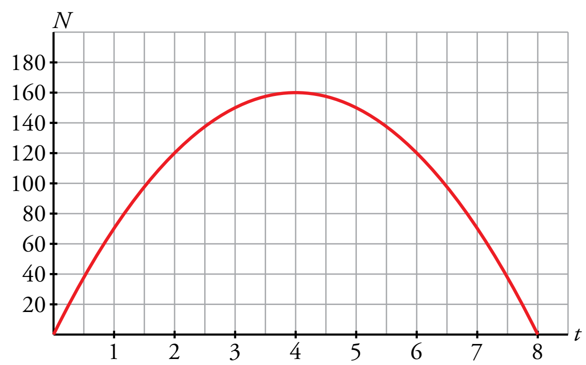
a) La función es una parábola abierta hacia abajo.

Su vértice es: $t_0 = \dfrac{-80}{-20} = 4 \rightarrow N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 160$

Hallamos los puntos de corte con el eje OX para saber cuándo no hay clientes.

$N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0 \rightarrow t = 0,\ t = 8$

Su gráfica es:



b) El número de clientes es máximo, 160, cuando lleva 4 horas abierta, a las 2 de la mañana.

c) La discoteca cerrará 8 horas después de abrir, es decir, a las 6 de la mañana.

46 **El porcentaje de alumnos que asisten a un curso de inglés de 10 meses de duración viene dado por la función:**

$$P(t) = \begin{cases} at^2 + bt + c & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases} \quad t, \text{ en meses}$$

Sabemos que, inicialmente, el 100 % de los alumnos asiste al curso; que transcurrido un mes, asiste el 60 % y que al cumplirse el tercer mes, la asistencia se reduce al 28 %. Calcula a, b, c y representa la función.

Los datos del problema reflejan que $P(0) = 100$, $P(1) = 60$ y $P(3) = 28$. Por tanto,

$$\left.\begin{array}{r} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 100 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 60 \\ a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 28 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} c = 100 \\ a + b + c = 60 \\ 9a + 3b + c = 28 \end{array}\right\} \to a = 8, \; b = -48, \; c = 100$$

La función es:

$$P(t) = \begin{cases} 8t^2 - 48t + 100 & \text{si } 0 \le t \le 3 \\ 28 & \text{si } 3 < t \le 10 \end{cases}$$

El primer trozo es parte de una parábola cuyo vértice es:

$$t_0 = \frac{48}{16} = 3 \to P(3) = 28; \text{ es decir, el punto } (3, 28).$$

El segundo trozo es una función constante.

La gráfica es:

47 **Las ganancias esperadas de una empresa en los próximos 10 años, en millones de euros, vienen dadas por la función $G(t) = -2t^2 + 20t + 5$; t, en años.**

a) Representa la función. b) ¿Cuándo serán máximas las ganancias?

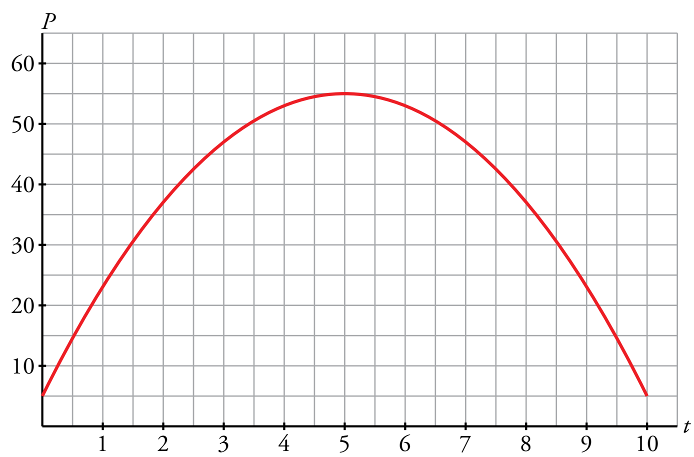
a) La función es una parábola con las ramas abiertas hacia abajo. Su vértice es:

$$t_0 = \frac{-20}{-4} = 5 \to G(5) = -2 \cdot 5^2 + 20 \cdot 5 + 5 = 55$$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

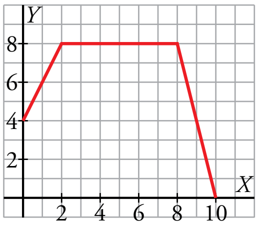
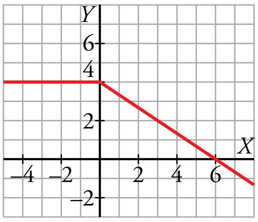
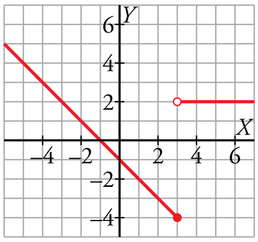
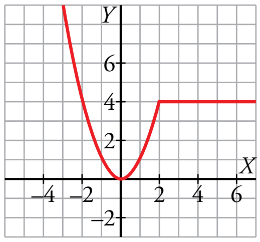
$G(0) = 5$

$G(10) = -2 \cdot 10^2 + 20 \cdot 10 + 5 = 5$



b) Las ganancias serán máximas dentro de 5 años y tendrán un valor de 55 millones de euros.

48 Obtén la expresión analítica de las siguientes funciones:

a) 
b) 
c) 
d) 

a) Primer trozo: $m = 2 \ \to \ y = 2x + 4$

Segundo trozo: $y = 8$

Tercer trozo: $m = -4 \ \to \ y = 8 + (-4)(x - 8) \ \to \ y = 40 - 4x$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 8 & \text{si } 2 \le x < 8 \\ 40 - 4x & \text{si } 8 \le x \le 10 \end{cases}$

b) Primer trozo: $y = 4$

Segundo trozo: $m = -\dfrac{2}{3} \ \to \ y = -\dfrac{2}{3}x + 4$

La función es: $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{2x}{3} + 4 & \text{si } 0 \le x \end{cases}$

c) Primer trozo: $m = -1 \ \to \ y = -x - 1$

Segundo trozo: $y = 2$

La función es: $f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } x \le 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) Primer trozo: $y = x^2$

Segundo trozo: $y = 4$

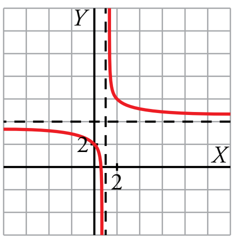
La función es: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

49 Representa las siguientes funciones partiendo de una más sencilla y realizando transformaciones sobre ella:

a) $y = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$ **b)** $y = \dfrac{x - 2}{x - 4}$ **c)** $y = \dfrac{3x + 2}{x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

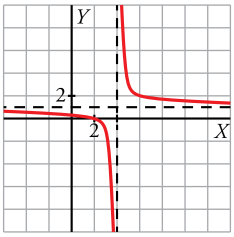
a) $y = \dfrac{3x - 2}{x - 1} = 3 + \dfrac{1}{x - 1}$

Se representa $\dfrac{1}{x}$ $\to$ Se traslada una unidad a la derecha y se obtiene $\dfrac{1}{x - 1}$ $\to$ Se traslada tres unidades hacia arriba y se obtiene $y = 3 + \dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{3x - 2}{x - 1}$.



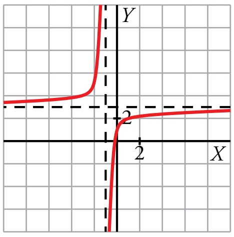
b) $y = \dfrac{x-2}{x-4} = 1 + \dfrac{2}{x-4}$

Se representa $\dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ Se traslada 4 unidades a la derecha y se obtiene $\dfrac{1}{x-4}$ $\rightarrow$ Se estira en sentido vertical multiplicando por 2 y se obtiene $\dfrac{2}{x-4}$ $\rightarrow$ Finalmente se traslada una unidad hacia arriba y se obtiene $y = 1 + \dfrac{2}{x-4} = \dfrac{x-2}{x-4}$.



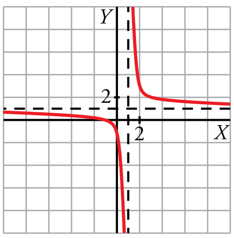
c) $y = \dfrac{3x+2}{x+1} = 3 + \dfrac{-1}{x+1}$

Se representa $\dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ Se traslada una unidad a la izquierda y se obtiene $\dfrac{1}{x+1}$ $\rightarrow$ Se hace su simétrica respecto al eje X y se obtiene $\dfrac{-1}{x+1}$ $\rightarrow$ Finalmente se traslada 3 unidades hacia arriba y se obtiene $y = 3 + \dfrac{-1}{x+1} = \dfrac{3x+2}{x+1}$.



d) $y = \dfrac{x+1}{x-1} = 1 + \dfrac{2}{x-1}$

Se representa $\dfrac{1}{x}$ $\rightarrow$ Se traslada una unidad a la derecha y se obtiene $\dfrac{1}{x-1}$ $\rightarrow$ Se estira en sentido vertical multiplicando por 2 y se obtiene $\dfrac{2}{x-1}$ $\rightarrow$ Finalmente se traslada una unidad hacia arriba y se obtiene $y = 1 + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

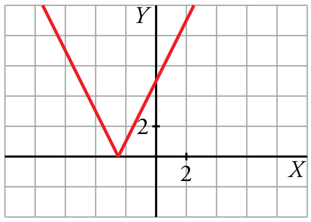


50 **Representa las siguientes funciones y defínelas como funciones "a trozos":**

a) $y = |2x + 5|$ **b)** $y = |4 - x^2|$ **c)** $y = \left|\frac{3}{2}x - 3\right|$ **d)** $y = |-x^2 + 2x + 3|$

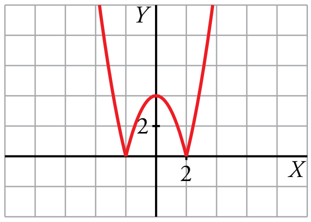
a) $2x + 5 = 0 \;\rightarrow\; x = -\frac{5}{2}$

$$y = |2x + 5| = \begin{cases} -(2x+5) & \text{si } x < -\frac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \geq -\frac{5}{2} \end{cases} = \begin{cases} -2x-5 & \text{si } x < -\frac{5}{2} \\ 2x+5 & \text{si } x \geq -\frac{5}{2} \end{cases}$$



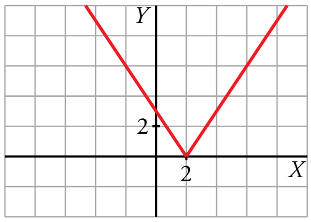
b) $4 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$

$$y = |4 - x^2| = \begin{cases} -(4-x^2) & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -(4-x^2) & \text{si } 2 \leq x \end{cases} = \begin{cases} -4+x^2 & \text{si } x < -2 \\ 4-x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -4+x^2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$



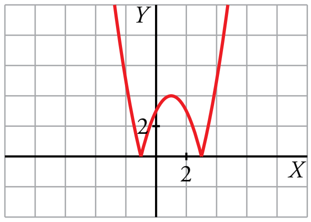
c) $\frac{3}{2}x - 3 = 0 \;\rightarrow\; x = 2$

$$y = \left|\frac{3}{2}x - 3\right| = \begin{cases} -\left(\frac{3}{2}x-3\right) & \text{si } x < 2 \\ \frac{3}{2}x-3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} = \begin{cases} -\frac{3}{2}x+3 & \text{si } x < 2 \\ \frac{3}{2}x-3 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$



d) $-x^2 + 2x + 3 = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 3$

$$y = |-x^2 + 2x + 3| = \begin{cases} -(-x^2+2x+3) & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ -(-x^2+2x+3) & \text{si } 3 \leq x \end{cases} = \begin{cases} x^2-2x-3 & \text{si } x < -1 \\ -x^2+2x+3 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ x^2-2x-3 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$



Página 133

Cuestiones teóricas

51 **¿Verdadero o falso?**

a) **La función** $y = \sqrt{a - x}$ **no existe si** $a < 0$.

b) **Una función no puede cortar al eje** Y **en dos puntos.**

c) **La gráfica de** $y = \sqrt{x + 3}$ **la podemos obtener trasladando tres unidades hacia arriba la gráfica de** $y = \sqrt{x}$.

d) **La gráfica de** $y = mx^2 + n$ **es una recta.**

e) **La parábola** $y = 3x^2$ **es más estrecha que** $y = x^2$.

a) Falso. Para que esta función exista, su radicando debe ser mayor o igual que 0. Por tanto:

$a - x \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq a \;\rightarrow\; Dom = (-\infty, a]$

La función tiene este dominio de definición al margen del signo de a.

b) Verdadero. Una función toma un único valor de y para cada valor de x. Tomará un único valor cuando $x = 0$ y, por tanto, solo puede cortar en un punto al eje Y.

c) Falso. La gráfica de $y = \sqrt{x + 3}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ desplazada 3 unidades a la izquierda.

d) Falso. Si $m = 0$, la gráfica sí es una recta paralela al eje X; pero si es $m \neq 0$, su gráfica es una parábola por ser una función cuadrática.

e) Verdadero.

52 **¿Cuántos puntos de corte pueden tener las funciones dadas en cada caso? Justifica la respuesta con ejemplos gráficos.**

a) $\begin{cases} y = x^2 \\ y = ax + b \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = ax + b \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y = 1/x \\ y = ax + b \end{cases}$

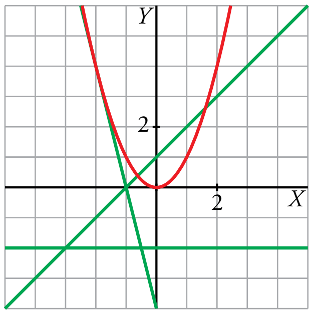
a) Puede tener como máximo dos soluciones, dependiendo de la posición relativa de la parábola y la recta. Es decir, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

Desde otro punto de vista, la ecuación $x^2 = ax + b$ puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -4x - 4 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (–2, 4).

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.



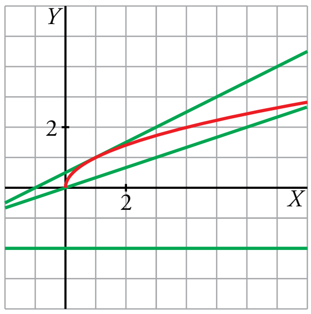
b) Este caso es análogo al anterior. En función de la posición relativa de la semiparábola y la recta, el sistema puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

La ecuación $\sqrt{x} = ax + b$ puede tener, como máximo, dos soluciones.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -2 \end{array}\right\}$ No tiene solución.

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{2}(x + 1) \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = \frac{1}{3}x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (0, 0) y (9, 3).



c) El sistema da lugar a una ecuación de segundo grado como podemos ver.

$\frac{1}{x} = ax + b \rightarrow x(ax + b) = 1 \rightarrow ax^2 + bx - 1 = 0$

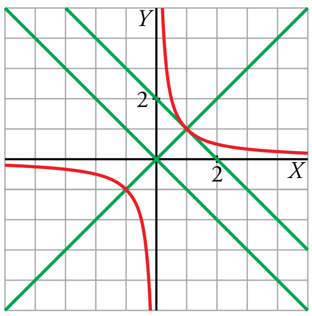
Por tanto, al igual que en los casos anteriores, puede tener, como máximo, dos soluciones.

También puede interpretarse desde el punto de vista de la posición relativa de una hipérbola y una recta.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x \end{array}\right\}$ No tiene solución.

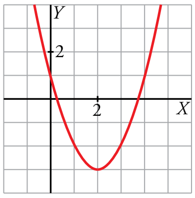
$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Tiene una solución, (1, 1).

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y = x \end{array}\right\}$ Tiene dos soluciones, (1, 1) y (–1, –1).



53 **La expresión analítica de esta función es del tipo $y = (x - m)^2 + n$.**

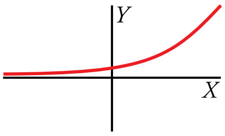
Observa la gráfica y di el valor de m y n.



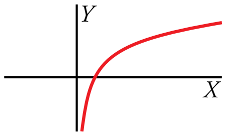
Como el vértice de la función es el punto (2, –3), la gráfica es el resultado de desplazar la gráfica de la función $y = x^2$ tres unidades hacia abajo y dos unidades hacia la derecha. Por tanto, $m = 2$ y $n = -3$.

54 **¿Cuál es el dominio de definición y el recorrido de estas funciones?:**

a)



b)



a) Dominio: $\mathbb{R}$

Recorrido: $(0, +\infty)$

b) Dominio: $(0, +\infty)$

Recorrido: $\mathbb{R}$

Para profundizar

55 **Define por intervalos y representa.**

a) $y = |x - 4| - |x|$

b) $y = |x + 1| + |x - 3|$

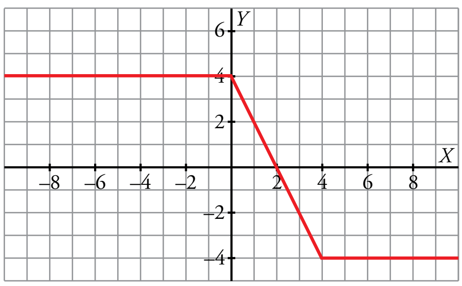
c) $y = |2x - 4| - |x - 1|$

a) Estudiamos la función en los intervalos cuyos extremos son los puntos donde se anula cada uno de los valores absolutos que se suman:

	$x \le 0$	$0 \le x \le 4$	$4 \le x$
$\|x - 4\|$	$-x + 4$	$4 - x$	$x - 4$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x - 4\| - \|x\|$	4	$-2x + 4$	-4

Por tanto:

$$y = |x - 4| - |x| = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 0 \\ -2x + 4 & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ -4 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

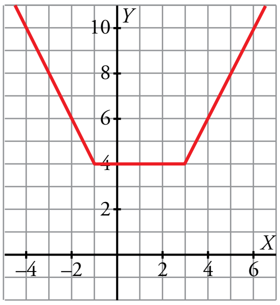


b) Estudiamos la función en los intervalos cuyos extremos son los puntos donde se anula cada uno de los valores absolutos que se operan.

	$x \le -1$	$-1 \le x \le 3$	$3 \le x$
$\|x + 1\|$	$-x - 1$	$x + 1$	$x + 1$
$\|x - 3\|$	$-x + 3$	$-x + 3$	$x - 3$
$\|x + 1\| + \|x - 3\|$	$-2x + 2$	4	$2x - 2$

Por tanto:

$$y = |x+1| + |x-3| = \begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x \le -1 \\ 4 & \text{si} \quad -1 \le x \le 3 \\ 2x-2 & \text{si} \quad 3 \le x \end{cases}$$

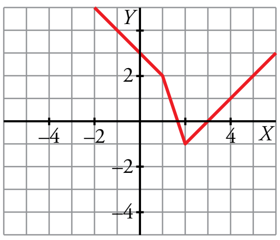


c) Estudiamos la función en los intervalos cuyos extremos son los puntos donde se anula cada uno de los valores absolutos que se operan.

	$x \le 1$	$1 \le x \le 2$	$2 \le x$
$\|2x - 4\|$	$-2x + 4$	$-2x + 4$	$2x - 4$
$\|x - 1\|$	$-x + 1$	$x - 1$	$x - 1$
$\|2x - 4\| - \|x - 1\|$	$-x + 3$	$-3x + 5$	$x - 3$

Por tanto:

$$y = |2x-4| - |x-1| = \begin{cases} -x+3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ -3x+5 & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ x-3 & \text{si} \quad 2 \le x \end{cases}$$



56 Halla el dominio de definición de estas funciones:

a) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **b)** $y = \sqrt{\dfrac{x-9}{x}}$

a) Tenemos que resolver la inecuación $\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0$ teniendo en cuenta, además, que $x \neq 2$ para que no se produzca una división entre 0 al evaluar la función:

	$(-\infty, -3]$	$[-3, 2)$	$(2, +\infty)$
$x+3$	–	+	+
$x-2$	–	–	+
$\dfrac{x+3}{x-2}$	+	–	+

$\dfrac{x+3}{x-2} \geq 0 \;\rightarrow\; Dom = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$

b) Análogamente, tenemos que resolver la inecuación $\dfrac{x-9}{x} \geq 0$ tieniendo en cuenta, además, que $x \neq 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 9]$	$[9, +\infty)$
$x-9$	–	–	+
x	–	+	+
$\dfrac{x-9}{x}$	+	–	+

$\dfrac{x-9}{x} \geq 0 \;\rightarrow\; Dom = (-\infty, 0) \cup [9, +\infty)$

57 La evolución mensual del número de socios de un club, durante un año, viene dada por la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 50 & \text{si } 6 < x \leq 8 \\ x^2 - 20x + 146 & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases} \quad x, \text{ en meses}$$

a) Halla a sabiendo que el club se fundó con 50 socios.

b) Representa la función y di en qué mes el número de socios fue máximo y en qué mes fue mínimo.

c) Si para cubrir gastos el club necesita tener más de 47 socios, ¿en qué mes tuvo pérdidas?

a) Como el club se fundó con 50 socios, se tiene que $f(0) = 50$. Por tanto, $f(0) = a = 50$.

b) • El primer trozo es una parábola abierta hacia abajo cuyo vértice es:

$x_0 = \dfrac{-6}{-2} = 3 \;\rightarrow\; f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 50 = 59 \;\rightarrow\; (3, 59)$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición: $f(0) = 50$, $f(6) = 50$

• El segundo trozo es constante, $y = 50$.

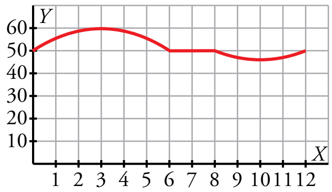
• El tercer trozo es una parábola abierta hacia arriba cuyio vértice es:

$x_0 = \dfrac{20}{2} = 10 \;\rightarrow\; f(10) = 10^2 - 20 \cdot 10 + 146 = 46 \;\rightarrow\; (10, 46)$

Evaluamos en los extremos del intervalo de definición:

$f(8) = 8^2 - 20 \cdot 8 + 146 = 50$, $f(12) = 50$

La gráfica es:



El número de socios fue máximo en el mes número 3, con 59 socios, y mínimo en el mes número 10, con 46 socios.

c) Obtuvo pérdidas en el mes número 10.

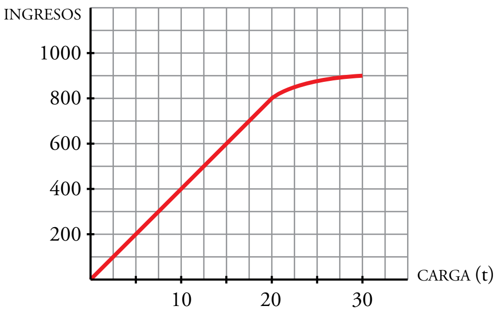
58 **Las tarifas de una empresa de transportes son:**

- **40 € por tonelada de carga si esta es menor o igual a 20 t.**
- **Si la carga es mayor que 20 t, se restará, de los 40 euros, tantos euros como toneladas sobrepasen las 20.**

a) Dibuja la función *ingresos de la empresa según la carga que transporte* (carga máxima: 30 t).

b) Obtén la expresión analítica.

a)



b) $f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ [40 - (x - 20)] & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$

Es decir:

$$f(x) = \begin{cases} 40x & \text{si } 0 \le x \le 20 \\ 60x - x^2 & \text{si } 20 < x \le 30 \end{cases}$$

Autoevaluación

1 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - x^2$ **b)** $y = \dfrac{3x}{(2x-6)^2}$ **c)** $y = \sqrt{4-2x}$ **d)** $y = \sqrt{5x - x^2}$

a) Al ser una función polinómica, su dominio es todo $\mathbb{R}$.

b) Su dominio es todo $\mathbb{R}$, salvo los puntos que anulan el denominador.

$(2x-6)^2 = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

Por tanto: $Dom\ y = \mathbb{R} - \{3\}$

c) Su dominio son los puntos que hacen que el radicando no sea negativo.

$4 - 2x \geq 0 \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq \dfrac{4}{2} = 2$

Por tanto: $Dom\ y = (-\infty, 2]$

d) Al igual que en el apartado anterior:

$5x - x^2 \geq 0 \rightarrow x(5-x) \geq 0$

Esto ocurre si:

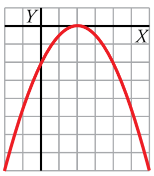
- $x \geq 0$ y $5 - x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$ y $x \leq 5 \rightarrow x \in [0, 5]$
- $x \geq 0$ y $5 - x \leq 0 \rightarrow x \leq 0$ y $x \geq 5 \rightarrow$ Esto no es posible.

Por tanto: $Dom\ y = [0, 5]$

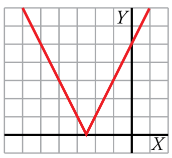
2 Representa las siguientes funciones:

a) $y = -0{,}5x^2 + 2x - 2$ **b)** $y = |5 + 2x|$ **c)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

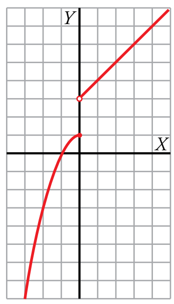
a)



b)



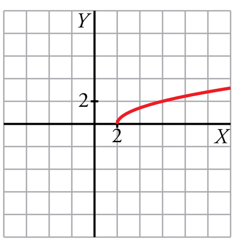
c)



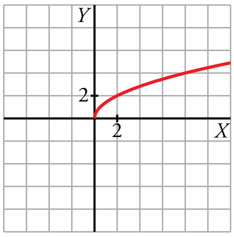
3 A partir de las gráficas de $y = \sqrt{x}$ e $y = \dfrac{1}{x}$, representa:

a) $y = \sqrt{x-2}$ **b)** $y = \sqrt{2x}$ **c)** $y = \dfrac{-1}{x+2}$ **d)** $y = \dfrac{x-2}{x-3}$

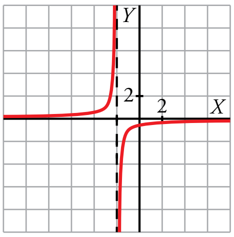
a) Se traslada $\sqrt{x}$ dos unidades a la derecha.



b) Se estira en sentido vertical $\sqrt{x}$, multiplicando por 2.

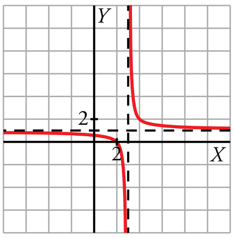


c) Se traslada $\frac{1}{x}$ dos unidades a la izquierda y se obtiene $\frac{1}{x+2}$ $\to$ Se hace su simétrica respecto del eje X y se obtiene $y = \frac{-1}{x+2}$.



d) $y = \frac{x-2}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}$

Se traslada $\frac{1}{x}$ tres unidades a la derecha y se obtiene $\frac{1}{x-3}$ $\to$ Se traslada una unidad hacia arriba y se obtiene $y = 1 + \frac{1}{x-3} = \frac{x-2}{x-3}$.



4 Asistir a un gimnasio durante 6 meses nos cuesta 246 €. Si asistimos 15 meses, el precio es 570 €. ¿Cuánto tendremos que pagar si queremos ir durante un año?

Vamos a hacer una interpolación lineal. Hallamos la recta que pasa por los puntos (6, 246) y (15, 570).

Su pendiente es $m = \frac{570-246}{15-6} = \frac{324}{9} = 36$

Por tanto, la ecuación de la recta es:

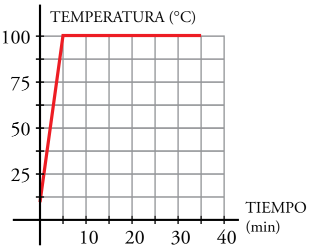
$$y = 36(x-6) + 246 \to y = 36x + 30$$

De este modo, si queremos saber cuánto se debe pagar si vamos al gimnasio durante un año (12 meses), hacemos:

$$y(12) = 36 \cdot 12 + 30 = 462$$

Habrá que pagar 462 €.

5 **Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente. Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.**



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).
- Hallamos la ecuación de esta recta:

Pendiente: $\frac{100-10}{5-0} = 18 \rightarrow y = 18(x-0) + 10$

- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\rightarrow y = 100$

Expresión analítica: $f(x) = \begin{cases} 18x+10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$

6 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos?

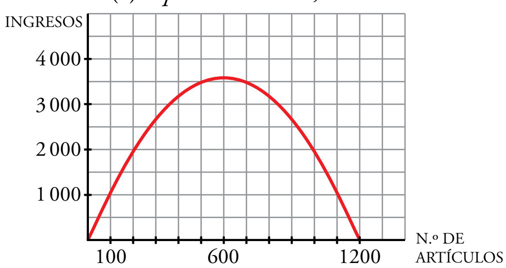
b) Representa la función *número de artículos-ingresos*.

c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7$ cientos de euros $\rightarrow$ Ingresos $= 500 \cdot 700 = 350\,000$ €

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).