Resuelve

Página 183

Movimiento de una partícula

Un investigador, para estudiar el movimiento de una partícula, la ha iluminado con destellos de flash cada décima de segundo (0,1 s) durante cuatro segundos. Esta es la fotografía a tamaño real:

1. Aproxima la velocidad de la partícula en el instante $t = 2$ s hallando su velocidad media en los intervalos [2; 2,5] y [2; 2,1]. Para ello, toma medidas sobre la fotografía.

2. Calcula las velocidades medias anteriores tomando valores sobre la ecuación del movimiento de dicha partícula: $s = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$

3. Halla ahora las velocidades medias en los intervalos [2; 2,001] y [2; 2,000001] tomando de nuevo valores sobre la ecuación del movimiento de la partícula. ¿Podemos considerar que esta última velocidad media es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s?

1. La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,5$ es de 12,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{12,5}{0,5} = 25 \text{ mm/s} = 2,5 \text{ cm/s}$$

La distancia que separa los puntos en los instantes $t = 2$ y $t = 2,1$ es de 3,5 mm, luego la velocidad es:

$$\frac{3,5}{0,1} = 35 \text{ mm/s} = 3,5 \text{ cm/s}$$

2. $$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}(2^4 - 8 \cdot 2^3 + 18 \cdot 2^2) = 12 \text{ cm} \\ s_2 &= \frac{1}{2}(2,5^4 - 8 \cdot 2,5^3 + 18 \cdot 2,5^2) = 13,28 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v_1 = \frac{13,28 - 12}{0,5} = 2,56 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 12 \text{ cm} \\ s_3 &= \frac{1}{2}(2,1^4 - 8 \cdot 2,1^3 + 18 \cdot 2,1^2) = 12,37 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v_2 = \frac{12,37 - 12}{0,1} = 3,77 \text{ cm/s}$$

3. $$\left.\begin{aligned} s_1 &= 12 \text{ cm} \\ s_4 &= \frac{1}{2}(2,001^4 - 8 \cdot 2,001^3 + 18 \cdot 2,001^2) = 12,003997 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v = \frac{12,003997 - 12}{0,001} = 3,997 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 12 \text{ cm} \\ s_5 &= \frac{1}{2}(2,000001^4 - 8 \cdot 2,000001^3 + 18 \cdot 2,000001^2) = 12,000004 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v = \frac{12,000004 - 12}{0,000001} = 4 \text{ cm/s}$$

Sí podemos considerar que esta última velocidad es muy parecida a la velocidad instantánea en $t = 2$ s porque el intervalo de tiempo transcurrido es tan solo una millonésima de segundo.

1 Medida del crecimiento de una función

Página 184

Hazlo tú. Halla la T.V.M. de $y = \sqrt{x-1}$ en [1, 2], [1, 5] y [1, 10].

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1} = 1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{T.V.M. } [1, 10] = \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9} = \frac{1}{3}$$

1 ¿Verdadero o falso?

a) La T.V.M. mide el crecimiento medio de una función en un intervalo.

b) Si f es creciente en $[a, b]$, su T.V.M. en ese intervalo es positiva, y si es decreciente, su T.V.M. es negativa.

c) Si la T.V.M. de f en $[a, b]$ es 0, significa que f es constante en $[a, b]$.

a) Verdadero.

b) Verdadero. El signo de la T.V.M. depende solo del signo del numerador. Si f es creciente $f(b) > f(a)$, luego el numerador es positivo. Si f es decreciente, $f(b) < f(a)$, luego el numerador es negativo.

c) Falso. Solo podemos afirmar que $f(a) = f(b)$. Esto no quiere decir que sea constante.

2 Halla la T.V.M. de la función $y = x^2 - 8x + 12$ en los siguientes intervalos:

[1, 2], [1, 3], [1, 4], [1, 5], [1, 6], [1, 7], [1, 8]

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{T.V.M. } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{T.V.M. } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{T.V.M. } [1, 6] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{T.V.M. } [1, 7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{T.V.M. } [1, 8] = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Halla la T.V.M. de $y = x^2 - 8x + 12$ en el intervalo variable [1, 1 + h].**

Comprueba que, dando a h los valores adecuados, se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

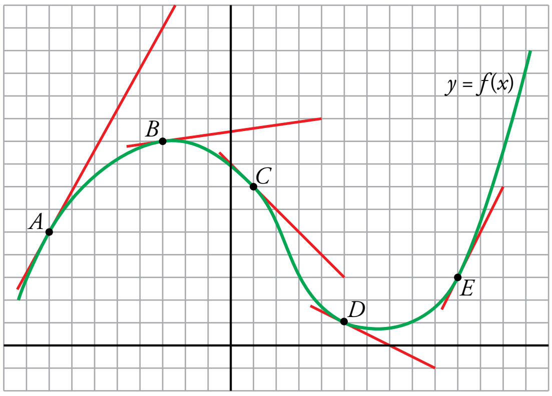
$$\text{T.V.M. } [1,\ 1+h] = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 8(1+h) + 12 - 5}{h} = \frac{h^2 - 6h}{h} = \frac{h(h-6)}{h} = h - 6$$

Dando a h los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 se obtienen los resultados del ejercicio anterior.

Página 185

4 **En la gráfica, en verde, de la función $y = f(x)$ adjunta, se han señalado cinco puntos: *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.**

En cada uno de ellos está trazada la recta tangente, cuya pendiente se puede calcular.



Expresa los resultados utilizando expresiones del tipo:

$f'(a) = \ldots$

Por ejemplo, para el punto *B*:

$f'(-3) = \ldots$

PUNTO	PENDIENTE
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

2 Obtención de la derivada a partir de la expresión analítica

Página 187

Hazlo tú. Halla la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en los puntos de abscisas 1, –1 y 5.

- $f'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$f(1+h) = \frac{3}{1+h-2} = \frac{3}{h-1}$$

$$f(1) = \frac{3}{1-2} = -2$$

$$f(1+h) - f(1) = \frac{3}{h-1} - (-3) = \frac{3h}{h-1}$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \frac{3}{h-1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

- $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$$f(-1+h) = \frac{3}{-1+h-2} = \frac{3}{h-3}$$

$$f(-1) = \frac{3}{-1-2} = -1$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{3}{h-3} - (-1) = \frac{h}{h-3}$$

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{h}{h-3}}{h} = \frac{1}{h-3}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

- $f'(5) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$$f(5+h) = \frac{3}{5+h-2} = \frac{3}{h+3}$$

$$f(5) = \frac{3}{5-2} = 1$$

$$f(5+h) - f(5) = \frac{3}{h+3} - 1 = \frac{-h}{h+3}$$

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\frac{1}{h+3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{h+3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Hazlo tú. **Halla la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en los puntos de abscisas 0, 1, 2, 3, 4 y 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $\quad f'(1) = 1 + 7 = 8$ $\quad f'(2) = 9$ $\quad f'(3) = 10$ $\quad f'(4) = 11$ $\quad f'(5) = 12$

1 ¿Verdadero o falso?

a) La derivada de una función, $y = f(x)$, en $x = a$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ es paralela al eje X.

c) Si $f'(2) > 0$, entonces f es creciente en el punto de abscisa 2.

a) Verdadero.

b) Verdadero. La pendiente de la recta tangente en $x = 3$ es cero, luego la recta es horizontal.

c) Verdadero, debido a la inclinación de la recta tangente a f en ese punto.

2 Halla la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa –2.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 Halla la derivada de $y = -2x + 4$ en los puntos de abscisas –3, 0, 4 y 7. Explica por qué obtienes en todos los casos el mismo resultado.

- $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3+h) - f(-3) = -2(-3+h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

  $f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

  $f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h}$

  $f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

  $f'(7) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

Como la función es una línea recta, crece o decrece siempre de la misma forma y al ser la derivada una forma de medir el crecimiento de una función, esta debe valer lo mismo en todos los puntos.

4 Halla la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en los puntos de abscisas –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

Calculamos la derivada de forma general y la evaluamos en cada uno de los puntos pedidos.

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$

$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

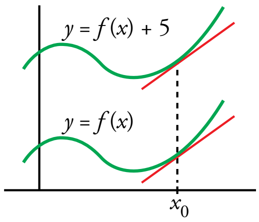
$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

3 Función derivada de otra

Página 188



1 **¿Verdadero o falso?**

Las rectas tangentes en un punto cualquiera, x_0, a las gráficas de $y = f(x)$ e $y = f(x) + 5$ son paralelas.

Eso significa que las dos funciones tienen la misma función derivada.

Verdadero, porque al ser paralelas las rectas tangentes en cualquier punto, deben tener la misma pendiente en todos los puntos.

2 **Halla la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ y, a partir de ella, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ y $f'(5)$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{3}{x+h-2}-\dfrac{3}{x-2}}{h} = 3 \cdot \frac{\dfrac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

3 **Halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ y calcula las pendientes de las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 4$ y $x = 7$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+h-3-(x-3)}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 **Halla la función derivada de $f(x) = x^3 + x^2$.**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3+(x+h)^2-(x^3+x^2)}{h} = \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx+x^2-x^3-x^2}{h} =$$

$$= \frac{3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x) = 3x^2 + 2x$$

Página 189

5 En la fórmula que sirve para hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

di el papel que desempeña cada una de las letras que intervienen. La x es la variable independiente, ¿de qué función?

a es la abscisa del punto en el que se halla la recta tangente.

$f(a)$ es la ordenada de dicho punto.

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente o, también, la derivada de la función en el punto de abscisa a.

x es la variable independiente de la recta tangente.

y es la variable dependiente de dicha recta.

4 Reglas para obtener las derivadas de algunas funciones

Página 190

1 **Calcula:** a) $D(x^5)$ b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right)$ d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right)$

a) $D(x^5) = 5x^4$

b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D(x^{-2}) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = D(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = D\left(\frac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = D\left(x^{5/6}\right) = \frac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Página 192

Hazlo tú. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \frac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\,\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \frac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\frac{4}{x^{7/3}} = -\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

Hazlo tú. Halla la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \frac{1}{125}(5^4)^x = \frac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \frac{1}{125}625^x\, ln\,625 = \frac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \frac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x^2}$

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\sqrt{x^3}\, e^x = \sqrt{3}\, x^{3/2}\, e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\, e^x + x^{3/2}\, e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\, e^x + x\sqrt{x}\, e^x\right) = \sqrt{3x}\, e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot cos\ x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\ cos\ x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x\ cos\ x - e^x\ sen\ x)\, 2^x - e^x\ cos\ x\ 2^x\ ln\ 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\ cos\ x - e^x\ sen\ x - e^x\ cos\ x\ ln\ 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\,(cos\ x - sen\ x - ln\ 2\ cos\ x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\ x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\ x + x \cdot 3^x\ ln\ 3 \cdot tg\ x + \frac{x \cdot 3^x}{cos^2\ x}$$

6 $f(x) = \dfrac{log_2\ x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\ 2} \cdot x - lon_2\ x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{ln\ 2} - log_2\ x}{x^2} = \frac{1 - ln\ 2\ log_2\ x}{x^2\ ln\ 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\, x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\, 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (sen\ x)\left(x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = (cos\ x)\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + (sen\ x)\ (2x)$$

10 $f(x) = \dfrac{2^x}{cos\ x}$

$$f'(x) = \frac{2^x \cdot ln\ 2 \cdot cos\ x - 2^x\,(-sen\ x)}{cos^2\ x} = \frac{2^x\,(ln\ 2 \cdot cos\ x + sen\ x)}{cos^2\ x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}5^x$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}5^x + \dfrac{1}{x}5^x \ln 5 = 5^x \dfrac{x \ln 5 - 1}{x^2}$

Página 193

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

12 $f(x) = sen\,(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\ cos\,(x^2 - 5x + 7)$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$

14 $f(x) = sen^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(sen^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (\square^2)' = 2\square \\ (sen\,\square)' = cos\,\square \\ \left(3x+\frac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 6sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

También, usando la fórmula del seno del ángulo doble, podríamos dar el resultado de esta otra manera:

$f'(x) = 2sen\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) \cdot 3 = 3sen\,(6x+\pi) = -3\ sen\,6x$

15 $f(x) = \dfrac{log\,x^2}{x}$

$f(x) = \dfrac{2\,log\,x}{x} \to f'(x) = \dfrac{2(1 - ln\,10\ log\,x)}{x^2\,ln\,10}$

16 $f(x) = cos\,(3x - \pi)$

$f'(x) = -3\ sen\,(3x - \pi)$

17 $f(x) = \sqrt{1+2x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

18 $f(x) = x\,e^{2x+1}$

$f'(x) = e^{2x+1} + x\,e^{2x+1} \cdot 2 = e^{2x+1}(1+2x)$

19 $f(x) = \dfrac{sen\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}\,cos\,(x^2+1) + [x\,sen\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \dfrac{2x(1-x^2)\,cos\,(x^2+1) + x\,sen\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

5 Utilidad de la función derivada

Página 194

Hazlo tú. Halla las rectas tangentes a $y = x^3 - 2x^2$ paralelas a $y = -x$.

Buscamos las rectas de pendiente –1:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 \to f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Las soluciones de la ecuación $3x^2 - 4x = -1$ son las abscisas de los puntos en los que las rectas tangentes a la gráfica de la función tienen pendiente –1 y, por tanto, son paralelas a la recta dada.

$$3x^2 - 4x = -1 \to 3x^2 - 4x + 1 = 0 \to x = 1, \; x = \frac{1}{3}$$

$$x = 1 \to f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 = -1 \to \text{Recta tangente: } y = -1 \cdot (x - 1) - 1 \to y = -x$$

$$x = \frac{1}{3} \to f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{27} \to \text{Recta tangente: } y = -1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{27} \to y = -x + \frac{4}{27}$$

Página 195

Hazlo tú. Halla los puntos singulares de $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ y determina los intervalos donde crece o decrece.

Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \to 6x^2 - 6x - 12 = 0 \to x^2 - x - 2 = 0 \to x_1 = -1, \; x_2 = 2$$

$$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \to (-1, 10) \text{ es un punto singular.}$$

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 3 = -17 \to (2, -17) \text{ es otro punto singular.}$$

Teniendo en cuenta las ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenemos que los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$ son intervalos de crecimiento. En el intervalo $(-1, 2)$ la función decrece.

1 a) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de $y = x^4 - 8x^2 + 12x$ en los puntos de abscisas 1 y –1.

b) Halla las rectas tangentes a la curva con pendiente 12.

a) Calculamos la derivada primera:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x + 12$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 4 - 16 + 12 = 0 \\ f(1) = 1 - 8 + 12 = 5 \end{array}\right\} \to \text{La recta tangente es: } y = 0(x - 1) + 5 \to y = 5$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-1) = -4 + 16 + 12 = 24 \\ f(-1) = 1 - 8 - 12 = -19 \end{array}\right\} \to \text{La recta tangente es: } y = 24(x + 1) - 19 \to y = 24x + 5$$

b) Hallamos las abscisas de los puntos en los que las tangentes tienen pendiente 12 resolviendo la ecuación $f'(x) = 12$:

$4x^3 - 16x + 12 = 12 \to 4x^3 - 16x = 0 \to x(4x^2 - 16) = 0 \to x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

- $x = -2 \to f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 12(-2) = -40$

  La recta tangente es: $y = 12(x + 2) - 40 \to y = 12x - 16$

- $x = 0 \to f(0) = 0$

  La recta tangente es: $y = 12x$

- $x = 2 \to f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 = 8$

  La recta tangente es: $y = 12(x - 2) + 8 \to y = 12x - 16$

2 Halla el valor máximo de la función $y = -x^3 + 12x + 3$ en el intervalo $[0, 3]$ y en el intervalo $[-5, 3]$. Halla el mínimo en cada uno de esos intervalos.

Calculamos primero los puntos singulares de la función:

$f'(x) = -3x^2 + 12$

$f'(x) = 0 \to -3x^2 + 12 = 0 \to x_1 = -2,\ x_2 = 2$

- En el intervalo [0, 3] evaluamos:

  $f(0) = 3 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El máximo se encuentra en $x = 2$ y vale 19.

  El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 3.

- En el intervalo [–5, 3] evaluamos:

  $f(-5) = 68 \quad f(-2) = -13 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El máximo se encuentra en $x = -5$ y vale 68.

  El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –13.

6 Representación de funciones

Página 197

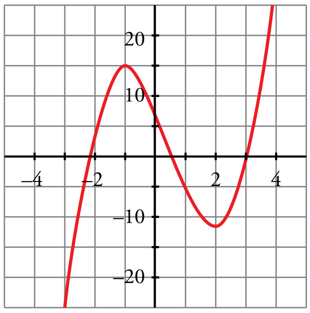
1 Representa estas funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = 2$

Máximo en $(-1, 15)$.

Mínimo en $(2, -12)$.



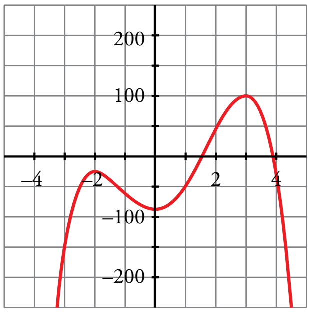
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en $(-2, -26)$ y en $(3, 99)$.

Mínimo en $(0, -90)$.



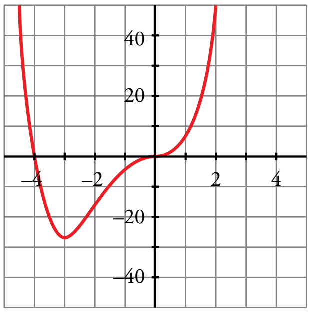
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínimo en $(-3, -27)$.

Punto de inflexión en $(0, 0)$.

$f(x) = 0 \;\rightarrow\; x^3(x+4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Puntos de corte con los ejes: $(0, 0)$ y $(-4, 0)$.



Página 199

2 Representa las siguientes funciones racionales, siguiendo los pasos de la página anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x+1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x+1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

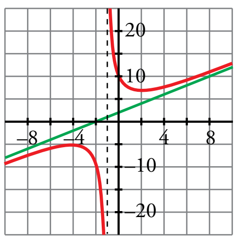
a) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2+3x+11)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 2,\; x_2 = -4$

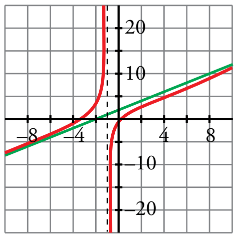
Máximo en $(-4, -5)$. Mínimo en $(2, 7)$.

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

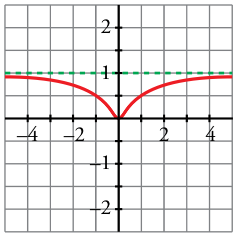


Puntos de corte con los ejes: (0, 0) y (–3, 0)

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

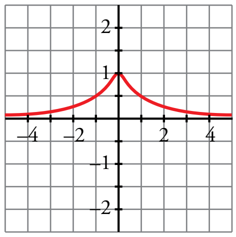
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$



Mínimo en (0, 0).

Asíntota horizontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \to x = 0$

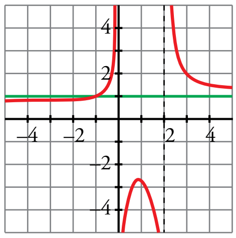


Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \to x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$



Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$

f) • Dominio = $\mathbb{R} - \{0\}$

- Asíntota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ es asíntota vertical}$$

- Asíntota horizontal:

$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ es asíntota horizontal

Cuando $x \to -\infty$, $y < 1$; y cuando $x \to +\infty$, $y < 1$.

Por tanto, la curva está por debajo de la asíntota.

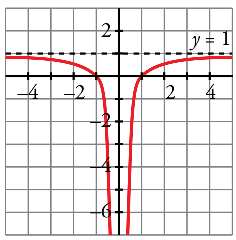
- Puntos singulares:

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) \neq 0 \to f(x)$ no tiene puntos singulares

Observamos que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; y que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Luego la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y es creciente en $(0, +\infty)$.



- Corta al eje X en (–1, 0) y (1, 0).

Ejercicios y problemas resueltos

Página 200

1. Función derivada a partir de la definición

Hazlo tú. Dada $f(x) = \frac{x}{x+1}$, halla $f'(x)$ aplicando la definición.

$$f(x+\text{h}) - f(x) = \frac{x+\text{h}}{x+\text{h}+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+\text{h})(x+1) - x(x+\text{h}+1)}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + \text{h}x + \text{h} - x^2 - x\text{h} - x}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{\text{h}}{(x+\text{h}+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{f(x+\text{h}) - f(x)}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{\frac{\text{h}}{(x+\text{h}+1)(x+1)}}{\text{h}} = \lim_{\text{h}\to 0} \frac{1}{(x+\text{h}+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Reglas de derivación

Hazlo tú. Halla $f'(x)$ siendo: $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$

$$f(x) = 2\ln\frac{x+1}{x} = 2[\ln(x+1) - \ln x]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

Página 201

4. Recta tangente paralela a una recta

Hazlo tú. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sea paralela a la recta $2x - y + 5 = 0$.

Despejando y en la ecuación de la recta dada, podemos obtener su pendiente.

$y = 2x + 5 \to$ La pendiente de la recta es 2.

Las abscisas de los puntos en los que la recta tangente es paralela a la recta anterior son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 6x - 4 \to 6x - 4 = 2 \to x = 1$ es el punto en el que la tangente y la recta dada son paralelas.

Finalmente, como $f(1) = -1$, la recta buscada es $y = 2(x - 1) - 1$, es decir, $y = 2x - 3$.

5. Puntos de tangente horizontal

Hazlo tú. Halla los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 6x^2$ y di si son máximos o mínimos.

Hallamos las abscisas de los puntos singulares resolviendo la ecuación $f'(x) = 3x^2 - 12x$:

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 4$

Calculamos las ordenadas de estos puntos:

$f(0) = 0 \qquad f(4) = -32$

Los puntos singulares son (0, 0) y (4, –32).

Ramas infinitas:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - 6x^2) = +\infty \to (4, -32) \text{ es un mínimo.}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x^3 - 6x^2) = -\infty \to (0, 0) \text{ es un máximo.}$$

6. Coeficientes de una función que tiene puntos singulares

Hazlo tú. Halla b y c de modo que la función $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ pase por $(1, 0)$ y $f'(1) = 5$.

Si f pasa por $(1, 0)$, entonces $f(1) = 0$.

$1^3 + b \cdot 1^2 + c = 0 \rightarrow c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

$f'(1) = 5 \rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 5 \rightarrow b = 1$

Página 202

7. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

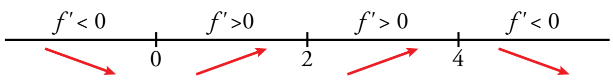
Hazlo tú. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2-x}$.

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$$

Estudiamos los signos de f dentro del dominio de definición en los intervalos cuyos extremos son los puntos singulares.



Por tanto, f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$ y decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

8. Gráfica de una función racional continua

Hazlo tú. Estudia y representa la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$.

Su dominio de definición es $\mathbb{R}$ porque la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal: $y = 2$ porque $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{x^2+1} = 2$

Posición: Calculamos $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - 2 = \dfrac{-2}{x^2+1}$

- Si $x \rightarrow +\infty$, entonces $f(x) - 2 < 0$.
- Si $x \rightarrow -\infty$, entonces $f(x) - 2 < 0$.

Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

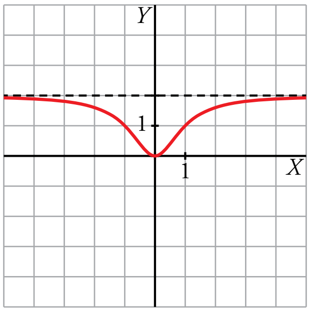
$f'(x) = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ El punto $(0, 0)$ es un punto singular.

Estudiamos el signo de $f'(x)$:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
SIGNO DE $f'(x)$	–	+
$f(x)$	↘	↗

El punto (0, 0) es un mínimo.

Gráfica:



Página 203

9. Estudio y representación de una función polinómica

Hazlo tú. **Estudia y representa esta función:**

$$f(x) = 1 + (x - 3)^3$$

- Por ser una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.
- Ramas infinitas:

$\lim\limits_{x \to +\infty} [1 + (x - 3)^3] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 + (x - 3)^3] = -\infty$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3(x - 3)^2$

$f'(x) = 0 \ \to \ 3(x - 3)^2 = 0 \ \to \ x = 3$

Como $f(3) = 1$, el punto (3, 1) es el único punto singular.

- Crecimiento y decrecimiento:

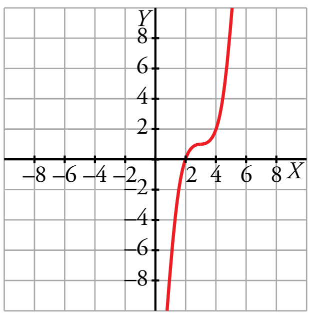
Como $f'(x) = 3(x - 3)^2 > 0$ para todo $x \neq 3$, la función crece a ambos lados de $x = 3$ y no es ni máximo ni mínimo.

- Cortes con los ejes:

$x = 0 \ \to \ y = -26$

$y = 0 \ \to \ 1 + (x - 3)^3 = 0 \ \to \ (x - 3)^3 = -1 \ \to \ x = 2$

- Gráfica:



10. Estudio y representación de una función racional

Hazlo tú. Estudia y representa esta función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$$

- La función no está definida en $x = 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asíntota vertical: $x = 0$

  Posición:

  Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

- Asíntotas horizontales y oblicuas:

  Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, tiene una asíntota oblicua. Dividimos:

  $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \rightarrow$ La asíntota es $y = 2x$

  Posición:

  Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Curva bajo la asíntota.

  Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Curva sobre la asíntota.

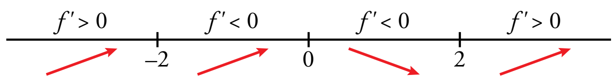
- Puntos singulares:

  $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

  $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

  $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Por tanto, $(-2, -8)$ y $(2, 8)$ son los puntos singulares.

- Crecimiento y decrecimiento:



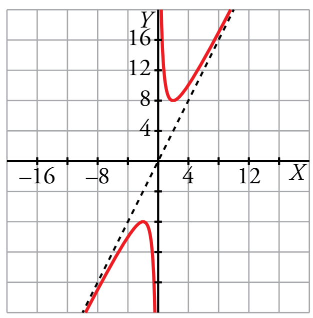
- Cortes con los ejes:

  No corta al eje OY.

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 8 = 0$ No tiene solución (no corta al eje OX).

- Gráfica:

  $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



Ejercicios y problemas guiados

Página 204

1. Derivadas sobre la gráfica

Observando la gráfica de la derecha, de $y = f(x)$, sobre la que se han trazado las tangentes en $x = 1$ y en $x = 3$:

a) Hallar el valor de $f'(1)$ y $f'(3)$.

b) ¿Para qué valores de x es $f'(x) = 0$?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) < 0$?

a) La tangente en $x = 1$ pasa por los puntos (1, 3) y (2, 1). Su pendiente es:

$$m = \frac{1-3}{2-1} = -2 \to f'(1) = -2$$

La tangente en $x = 3$ pasa por los puntos (3, 3) y (2, 1). Su pendiente es:

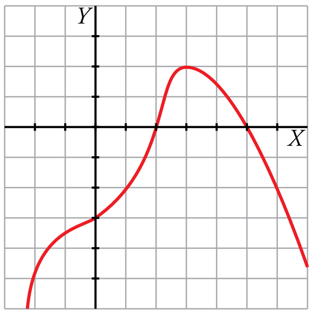
$$m = \frac{1-3}{2-3} = 2 \to f'(3) = 2$$

b) Los puntos de pendiente horizontal tienen abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

c) Si $f'(x) < 0$, entonces la función es decreciente. El intervalo de decrecimiento es (0, 2) y, por tanto, en ese intervalo la primera derivada es negativa.

2. Función polinómica

Representar una función polinómica sabiendo que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que sus puntos de tangente horizontal son (0, –3) y (3, 2), y que corta al eje X solo en $x = 2$ y en $x = 5$.



3. Función cuadrática

Hallar la función de segundo grado que pase por (0, 2) y tal que la pendiente de la recta tangente en el punto (1, –3) valga –1.

La ecuación de una función cuadrática es de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

Pasa por (0, 2) $\to$ $2 = c$

Pasa por (1, –3) $\to$ $-3 = a + b + 2 \to a + b = -5$

Como la pendiente de la tangente en (1, –3) es –1, debe ocurrir que $f'(1) = -1$:

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(1) = -1 \to 2a + b = -1$$

Resolvemos este sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = -5 \\ 2a + b = -1 \end{array}\right\} \to a = 4, \ b = -9$$

La función cuadrática buscada es $y = 4x^2 - 9x + 2$.

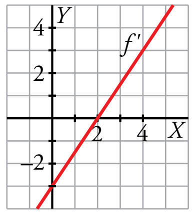
4. Gráfica de la función derivada

Esta es la gráfica de f', función derivada de f.

a) Obtener $f'(0)$ y $f'(4)$.

b) ¿Tiene f algún punto singular?

c) Estudiar el crecimiento de f.



a) Leyendo directamente la gráfica vemos que $f'(0) = -3$ y $f'(4) = 3$.

b) El punto $x = 2$ es un punto singular porque $f'(2) = 0$.

c) La función es creciente en $(2, +\infty)$ porque $f'(x) > 0$ en este intervalo.

5. Máximo y mínimo en un intervalo

Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en el intervalo $[0, 3]$.

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo de este tipo pueden darse en los extremos del intervalo o en los puntos singulares.

Calculamos los puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = -1, \; x = 1$$

El primer punto singular no lo consideramos porque queda fuera del intervalo [0, 3] en el que se estudia la función. Evaluamos:

$$f(0) = 1 \qquad f(1) = -1 \qquad f(3) = 19$$

Por tanto, el máximo se da en $x = 3$ y vale 19. El mínimo se da en $x = 1$ y vale –1.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 205

Para practicar

Tasa de variación media

1 Halla la tasa de variación media de estas funciones en el intervalo [1, 3] e indica si dichas funciones crecen o decrecen en ese intervalo:

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$ **c)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

$$\text{T.V.M. } [1, 3] = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(3) - f(1)}{2}$$

a) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{1/3 - 1}{2} = -\dfrac{1}{3} \to$ Decrece

b) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{-1 - 1}{2} = -1 \to$ Decrece

c) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{7 - 1}{2} = 3 \to$ Crece

d) T.V.M. [1, 3] $= \dfrac{8 - 2}{2} = 3 \to$ Crece

2 a) Halla la T.V.M. de las funciones $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \dfrac{1}{x + 1}$ en el intervalo [1, 1 + h].

b) Calcula la T.V.M. de esas funciones en el intervalo [1; 1,5] utilizando las expresiones obtenidas en el apartado anterior.

a) Para la función $f(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{-(1 + h)^2 + 5(1 + h) - 3 - 1}{h} = \frac{-1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 4}{h} = 3 - h$$

Para la función $g(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1, 1 + h] = \frac{g(1 + h) - g(1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{1 + h + 1} - \dfrac{1}{2}}{h} = \frac{\dfrac{2 - h - 2}{2(2 + h)}}{h} = \frac{-1}{2h + 4}$$

b) Para la función $f(x)$:

T.V.M. [1; 1,5] = 3 – 0,5 = 2,5

Para la función $g(x)$:

$$\text{T.V.M. } [1; 1{,}5] = \frac{-1}{2 \cdot 0{,}5 + 4} = \frac{-1}{5}$$

3 Compara la T.V.M. de las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ en los intervalos [2, 3] y [3, 4], y di cuál de las dos crece más en cada intervalo.

Para $f(x)$: T.V.M. [2, 3] = 19

T.V.M. [3, 4] = 37

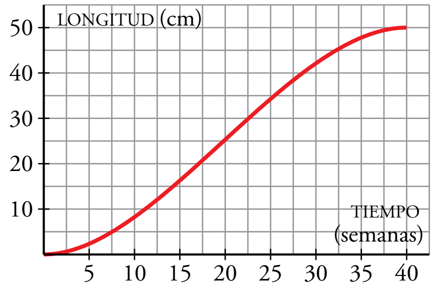
Para $g(x)$: T.V.M. [2, 3] = 18

T.V.M. [3, 4] = 54

En [2, 3] crece más $f(x)$.

En [3, 4] crece más $g(x)$.

4 **Esta gráfica muestra la longitud de un feto durante el embarazo. Estudia el crecimiento medio en los intervalos [5, 15] y [20, 30] y di en qué periodo es mayor el crecimiento:**



$$\text{T.V.M. } [5, 15] = \frac{f(15) - f(5)}{10} = \frac{17 - 2}{10} = 1{,}5 \text{ cm/semana}$$

$$\text{T.V.M. } [20, 30] = \frac{f(30) - f(20)}{10} = \frac{42 - 25}{10} = 1{,}7 \text{ cm/semana}$$

El crecimiento medio es mayor entre las semanas 20 y 30.

Definición de derivada

5 **Halla la derivada de las siguientes funciones en $x = 1$, utilizando la definición de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h)^2 - 1 - 2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1 + h^2 + 2h) - 3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 + 3h^2 + 6h - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(3h + 6)}{h} = 6$

b) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2(1+h) + 1)^2 - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2h + 3)^2 - 9}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h^2 + 9 + 12h - 9}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h(4h + 12)}{h} = 12$

c) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3/(1+h) - 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3 - 3 - 3h}{h(1+h)} = -3$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2} - \dfrac{1}{9}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{9 - h^2 - 6h - 9}{9(h+3)^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2 - 6h}{9h(h+3)^2} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h - 6}{9(h+3)^2} = \dfrac{-2}{27}$

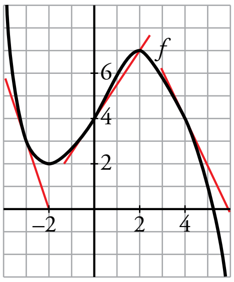
6 **Aplica la definición de derivada para hallar la pendiente de la tangente en $x = 2$ de las curvas $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x) = \dfrac{1}{3x - 7}$.**

- $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dfrac{4(2+h) - (2+h)^2 - 4}{h} = \dfrac{8 + 4h - 4 - 4h - h^2 - 4}{h} = -h$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-h) = 0$

- $\dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3(2+h) - 7} - (-1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{3h - 1} + 1}{h} = \dfrac{3}{3h - 1}$

$g'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3}{3h - 1} = -3$

7 

Observa la gráfica de f en la que se han trazado las tangentes en $x = -3$, $x = 0$ y $x = 4$ y responde.

a) ¿Cuál es el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ y $f'(4)$?

b) ¿En qué puntos es $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, ¿la derivada es positiva o negativa? ¿Y en $x = 3$?

a) $f'(-3) = -3 \qquad f'(0) = \dfrac{3}{2} \qquad f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ y $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada es positiva porque la pendiente de la tangente lo es. Análogamente, la derivada en $x = 3$ es negativa.

8 Halla la función derivada de las siguientes funciones, aplicando la definición:

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$

b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{5(x+h)-3}{2} - \dfrac{5x-3}{2}}{h} = \frac{5x+5h-3-5x+3}{2h} = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+7(x+h)-1-(x^2+7x-1)}{h} =$$

$$= \frac{x^2+2hx+h^2+7x+7h-1-x^2-7x+1}{h} = 2x + h + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$$

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-5(x+h)-(x^3-5x)}{h} =$$

$$= \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-5x-5h-x^3+5x}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$$

d) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{x+h-1}{x+h} - \dfrac{x-1}{x}}{h} = \frac{x(x+h-1)-(x+h)(x-1)}{hx(x+h)} =$$

$$= \frac{x^2+hx-x-(x^2-x+hx-h)}{hx(x+h)} = \frac{1}{x(h+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(h+x)} = \frac{1}{x^2}$$

Reglas de derivación

9 **Halla la función derivada de las siguientes funciones y simplifica cuando sea posible:**

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3e^{2x}$

c) $f(x) = \frac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{1}{7x+1} + \frac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = \ln (x^2 + 3x)$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \frac{e^{x-3}}{5}$

j) $f(x) = \left(\frac{3-x}{x}\right) \log_2 x$

a) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f'(x) = 3e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}$

c) $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Teniendo en cuenta que $\frac{\sqrt{2x}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-7}{(7x+1)^2} + \frac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$$

f) $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x+3) = \frac{2x+3}{x^2+3x}$

g) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot x - \sqrt{x+1}}{x^2} = \frac{x - 2(x+1)}{2x^2\sqrt{x+1}} = \frac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$

h) $f(x) = \ln 3 + \ln x + e^{-x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \frac{1}{x} - e^{-x}$$

i) $f'(x) = \frac{e^{x-3}}{5}$

j) $f'(x) = \frac{(-1)x - (3-x)}{x^2} \log_2 x + \frac{3-x}{x} \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \frac{-3 \log_2 x}{x^2} + \frac{3-x}{x^2 \ln 2} = \frac{1}{x^2}\left(-3 \log_2 x + \frac{3-x}{\ln 2}\right)$

10 **Aplica las reglas de derivación y simplifica si es posible.**

a) $f(x) = (5x-2)^3$

b) $f(x) = 3 \cos (x + \pi)$

c) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

d) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x+7}{x}}$

f) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = \operatorname{tg} (3x)$

h) $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$

j) $f(x) = (x + \ln x)^2$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f'(x) = -3sen\,(x+\pi)$

c) $f'(x) = cos\,\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,cos\,\frac{x}{2}$

d) $f(x) = \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2) = -2e^{-2x}$

e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+7}{x}}}\cdot\frac{x-(x+7)}{x^2} = \frac{-7}{2x^2}\sqrt{\frac{x}{x+7}}$

f) $f'(x) = \frac{3x^2}{8}e^{2x+1} + \frac{x^3}{8}e^{2x+1}\cdot 2 = \frac{e^{2x+1}}{8}(2x^3+3x^2)$

g) $f'(x) = \frac{1}{cos^2(3x)}\cdot 3 = \frac{3}{cos^2(3x)}$

h) $f'(x) = sen\,x^2 + x\,cos\,x^2\cdot 2x = sen\,x^2 + 2x^2\,cos\,x^2$

i) $f'(x) = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{ln\,x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{ln\,x}}$

j) $f'(x) = 2(x+ln\,x)\left(1+\frac{1}{x}\right) = 2\left(x+1+ln\,x+\frac{ln\,x}{x}\right)$

11 Deriva las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{e^x+1}$

b) $f(x) = \left(\frac{ln\,x}{x}\right)^2$

c) $f(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $f(x) = \left(\frac{3x}{1-x^2}\right)^2$

e) $f(x) = \frac{x}{3}\,log_2\,(1-x^2)$

f) $f(x) = e^{-x}\,ln\,\frac{1}{x}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{(5x+2)^2}$

h) $f(x) = ln\left(\frac{1}{4x}-\frac{x}{2}\right)$

a) $f(x) = (e^x+1)^{1/3}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(e^x+1)^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(e^x+1)^2}}$

b) $f'(x) = 2\,\frac{ln\,x}{x}\cdot\frac{\frac{1}{x}\cdot x - ln\,x}{x^2} = \frac{2\,ln\,x\,(1-ln\,x)}{x^3}$

c) $f(x) = -3(1-x^2)^{-1/2}$

$f'(x) = -3\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x) = \frac{-3x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{-3x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

d) $f'(x) = 2\cdot\frac{3x}{1-x^2}\cdot\frac{3(1-x^2)-3x\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{6x(3x^2+3)}{(1-x^2)^3} = \frac{18x(x^2+1)}{(1-x^2)^3}$

e) $f'(x) = \frac{1}{3}\,log_2(1-x^2) + \frac{x}{3}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{ln\,2}\cdot(-2x) = \frac{log_2(1-x^2)}{3} - \frac{2x^2}{3(1-x^2)\,ln\,2}$

f) $f(x) = e^{-x}(-ln\,x) = -e^{-x}\,ln\,x$

$f'(x) = -\left(-e^{-x}\,ln\,x + e^{-x}\cdot\frac{1}{x}\right) = e^{-x}\left(ln\,x - \frac{1}{x}\right)$

g) $f(x) = (5x + 2)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5x+2)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x+2}}$$

h) $f(x) = ln\left(\frac{1-2x^2}{4x}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1-2x^2}{4x}} \cdot \frac{-4x \cdot 4x - (1-2x^2) \cdot 4}{(4x)^2} = \frac{4x}{1-2x^2} \cdot \frac{-8x^2-4}{(4x)^2} = \frac{-4(2x^2+1)}{4x(1-2x^2)} = \frac{2x^2+1}{x(2x^2-1)}$$

12 **Aplica las propiedades de los logaritmos antes de aplicar las reglas de derivación, para obtener la derivada de estas funciones:**

a) $f(x) = ln\, \frac{x^2+1}{x^2-1}$

b) $f(x) = ln\,(x \cdot e^{-x})$

c) $f(x) = ln\,(1-3x^2)^4$

d) $f(x) = log_2 \sqrt[3]{5x-x^2}$

e) $f(x) = ln\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}$

f) $f(x) = log\, \frac{(3x-5)^3}{x}$

g) $f(x) = log_2 \sqrt{\frac{x-1}{x^3}}$

h) $f(x) = log\, \frac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\,(x^2 + 1) - ln\,(x^2 - 1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$$

b) $f(x) = ln\,x + ln\,e^{-x} = ln\,x - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

c) $f(x) = 4ln\,(1-3x^2)$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{1-3x^2} \cdot (-6x) = \frac{24x}{3x^2-1}$$

d) $f(x) = log_2\,(5x - x^2)^{1/3} = \frac{1}{3} log_2\,(5x - x^2)$

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5x-x^2} \cdot \frac{1}{ln\,2} \cdot (5-2x) = \frac{5-2x}{3(5x-x^2)\,ln\,2}$$

e) $f(x) = \frac{1}{2}[ln\,x - ln\,(x^2+1)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

f) $f(x) = 3\,log\,(3x - 5) - log\,x$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{ln\,10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\,10} = \frac{1}{ln\,10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{ln\,10\,(3x^2-5x)}$$

g) $f(x) = log_2 \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2} log_2 \left(\dfrac{x-1}{x^3}\right) = \dfrac{1}{2} [log_2 (x-1) - 3\, log_2 x]$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} \cdot \dfrac{1}{ln\, 2} - \dfrac{3}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)\, ln\, 2} - \dfrac{3}{x}\right)$

h) $f(x) = x\, ln\, x$

$f'(x) = ln\, x + x \cdot \dfrac{1}{x} = ln\, x + 1$

Página 206

Recta tangente y recta normal

13 **Halla la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la función f en el punto de abscisa indicado en cada caso.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$

d) $f(x) = ln\, x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \dfrac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangente es $y = -1(x-2) + 0$, es decir, $y = -x + 2$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-1}(x-2) + 0$, es decir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \dfrac{1}{4}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{4}(x-3) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/4}(x-3) + 2$, es decir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangente es $y = -8(x+1) - 3$, es decir, $y = -8x - 11$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{-8}(x+1) - 3$, es decir, $y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{23}{8}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$

La recta tangente es $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal es $y = \dfrac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$, es decir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangente es $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

La recta normal es $y = \frac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$, es decir, $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$

14 **Halla los puntos en los que la pendiente de la recta tangente a cada una de las siguientes funciones es igual a 2:**

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \frac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = ln\,(4x - 1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \ \to\ 2x - 2 = 2 \ \to\ x = 2$

b) $f'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \ \to\ \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \ \to\ (x+2)^2 = 1 \ \to\ x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \ \to\ \frac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \ \to\ \sqrt{x+3} = 1 \ \to\ x = -2$

d) $f'(x) = \frac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \ \to\ \frac{4}{4x-1} = 2 \ \to\ 4x - 1 = 2 \ \to\ x = \frac{3}{4}$

15 **Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta tangente a *f*, que sea paralela a la recta dada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paralela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paralela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$ **paralela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \ \to\ y = -2x - 1$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente –2 para que sea paralela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \ \to\ 2x + 4 = -2 \ \to\ x = -3$

$f(-3) = -2$ y la recta tangente es $y = -2(x + 3) - 2$.

b) La recta tangente debe tener pendiente 6 para que sea paralela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \to 3x^2 - 3 = 6 \to x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \to f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = -\sqrt{3}$ es $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \to f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangente en $x = \sqrt{3}$ es $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \to y = 5x$

Por tanto, la recta tangente debe tener pendiente 5 para que sea paralela.

$$f'(x) = \frac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = 5 \to \frac{5}{(x+2)^2} = 5 \to (x+2)^2 = 1 \to x_1 = -1,\ x_2 = -3$$

Si $x = -1 \to f(-1) = -4$

La recta tangente en $x = -1$ es $y = 5(x + 1) - 4$

Si $x = -3 \to f(-3) = 6$

La recta tangente en $x = -3$ es $y = 5(x + 3) + 6$

16 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la función $y = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.**

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen haciendo $y = 0$.

$y = 0 \to 4 - x^2 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \to f'(-2) = 4$. La recta tangente en $x = -2$ es $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \to f'(2) = -4$. La recta tangente en $x = 2$ es $y = -4(x - 2)$

Las rectas normales son: en $x = -2$, $y = -\frac{1}{4}(x + 2)$ y en $x = 2$, $y = \frac{1}{4}(x - 2)$.

17 **Obtén los puntos donde la recta tangente es horizontal y escribe su ecuación.**

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

e) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

f) $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Los puntos donde la recta tangente es horizontal son aquellos en los que $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$f'(x) = 0 \to 6x - 2 = 0 \to x = \frac{1}{3}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{14}{3}$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \frac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 6x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 1$

$f(0) = 0 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(1) = 0 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 4x^3 - 12x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 3$

$f(0) = 0 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

$f(3) = -27 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$

$f(-2) = 16 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = -2$ es $y = 16$.

$f(2) = -16 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 2$ es $y = -16$.

e) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\; x = 1$

$f(-1) = 1 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y = -2$.

$f(1) = 1 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y = 2$.

f) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

$f(0) = 0 \;\rightarrow$ La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

Puntos singulares. Crecimiento y decrecimiento

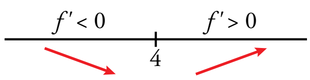
18 Halla, en cada caso, los puntos singulares de la función y determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$

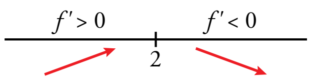


Como $f(4) = -5$, el punto $(4, -5)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(4, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 2$



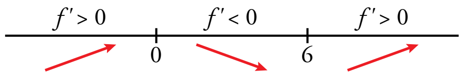
Como $f(2) = 12$, el punto $(2, 12)$ es un punto singular.

Intervalo de crecimiento, $(-\infty, 2)$. Intervalo de decrecimiento, $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 6$

Como $f(0) = 0$ y $f(6) = -36$, los puntos $(0, 0)$ y $(6, -36)$ son puntos singulares.

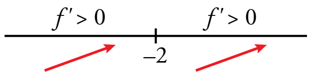


Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Intervalo de decrecimiento, $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 + 12x + 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$

Como $f(-2) = -8$, el punto $(-2, -8)$ es un punto singular.



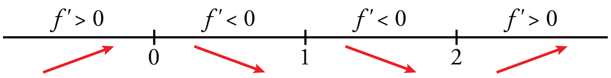
Intervalo de crecimiento, $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.



Intervalos de crecimiento, $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervalos de decrecimiento, $(0, 1) \cup (1, 2)$.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$

No tiene puntos singulares. Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq -2$ y la función no está definida en $x = -2$, los intervalos de crecimiento son $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 **Comprueba que las siguientes funciones no tienen puntos singulares y determina los intervalos donde crecen o decrecen:**

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 + 3 = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$, la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 0$ y no está definida en $x = 0$, los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ siempre que $x \neq 0$, el intervalo de crecimiento es $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución. Por tanto, no tiene puntos singulares.

Como $f'(x) > 0$ en su dominio de definición, el intervalo de crecimiento es $(0, +\infty)$.

20 **Halla los puntos singulares de las siguientes funciones y, con ayuda de las ramas infinitas, determina si son máximos o mínimos:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$

b) $y = 3x^2 - x^3$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$

d) $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$

f) $y = \dfrac{x^3+4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3},\ x = 1$

Como $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{58}{27}$ y $f(1) = 2$, los puntos $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ y $(1, 2)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ es un máximo y $(1, 2)$ es un mínimo.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

Como $f(0) = 0$ y $f(2) = 4$, los puntos $(0, 0)$ y $(2, 4)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto, $(0, 0)$ es un mínimo y $(2, 4)$ es un máximo.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

Como $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ y $f(2) = -6$, los puntos $(-2, -6)$, $(0, 10)$ y $(2, -6)$ son puntos singulares.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto, $(-2, -6)$ y $(2, -6)$ son mínimos.

El punto $(0, 10)$ debe ser un máximo porque está entre dos mínimos.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow -12x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = -1$

Como $f(-1) = 9$ el punto $(-1, 9)$ es un punto singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$$ Por tanto, $(-1, 9)$ es un máximo.

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \;\to\; x = 0$

Como $f(0) = 3$, el punto (0, 3) es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ Por tanto, (0, 3) es un máximo.

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

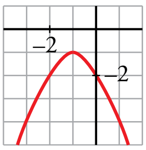
$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

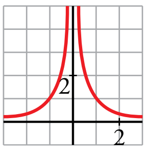
$f'(x) = 0 \;\to\; 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \;\to\; x = \sqrt[3]{2}$

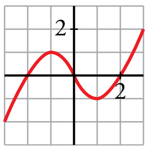
Como $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punto $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un punto singular.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$ Por tanto, $\left(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{4}\right)$ es un mínimo.

21 **Indica en cada una de estas funciones los valores de x en los que f' es positiva y en los que f' es negativa:**

a) 

b) 

c) 

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gráficas de funciones polinómicas y racionales

22 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

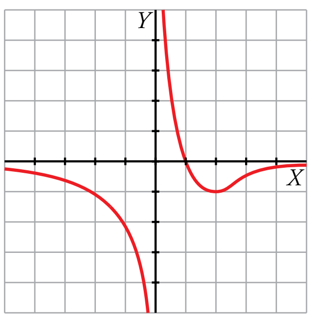
- **Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Corta al eje X en $x = 1$.**
- **Asíntota horizontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asíntota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínimo en (2, –1).**



23 **Representa una función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

- **Asíntota vertical: $x = 2$**

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

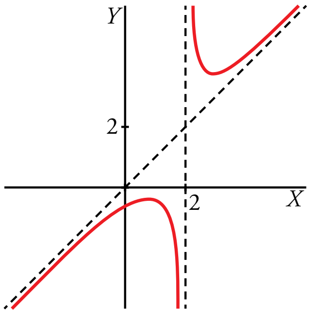
  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

- **Asíntota oblicua: $y = x$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) > x$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < x$

¿Tiene máximo o mínimo la función que has representado?

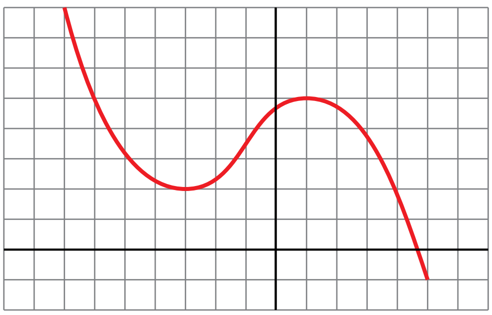


Sí. Tiene un máximo y un mínimo.

24 **Representa una función $y = f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Es continua.**
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **Sus puntos de tangente horizontal son (–3, 2) y (1, 5).**

Indica si los puntos de tangente horizontal son máximos o mínimos.



(–3, 2) es un mínimo.

(1, 5) es un máximo.

Página 207

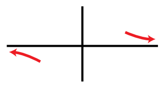
25 **De una función polinómica sabemos que:**

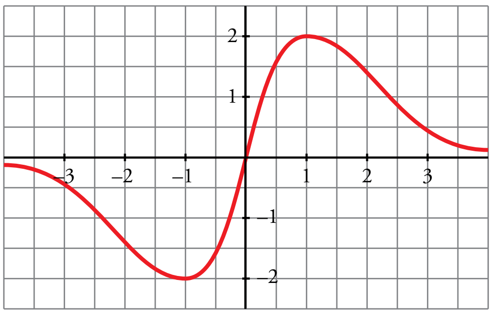
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **Su derivada es igual a 0 solo en (–2, 2) y en (2, –1).**
- **Corta a los ejes solo en (0, 0) y en (4, 0).**

Represéntala gráficamente.

26 **Representa una función continua $y = f(x)$ de la que sabemos que:**

- **Sus puntos de tangente horizontal son (–1, –2) y (1, 2).**
- **Sus ramas infinitas son así:**





27 **Comprueba que la función $y = (x - 1)^3$ pasa por los puntos (0, –1), (1, 0) y (2, 1). Su derivada se anula en el punto (1, 0). ¿Puede ser un máximo o un mínimo ese punto?**

$f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \;\rightarrow\;$ pasa por $(0, -1)$

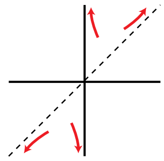
$f(1) = 0 \;\rightarrow\;$ pasa por $(1, 0)$

$f(2) = 1 \;\rightarrow\;$ pasa por $(2, 1)$

$f'(1) = 0$

El punto (1, 0) no es ni máximo ni mínimo.

28 **Comprueba que la función $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ tiene dos puntos de tangente horizontal, (–1, –2) y (1, 2); sus asíntotas son $x = 0$ e $y = x$ y la posición de la curva respecto de las asíntotas es la que se indica en la ilustración. Represéntala.**



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

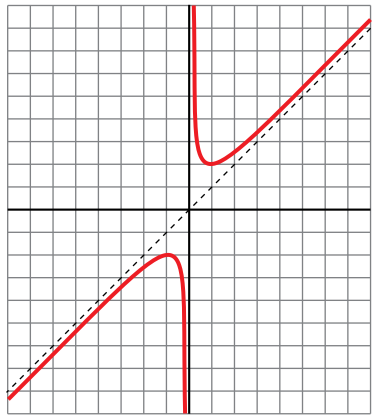
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

Puntos (–1, –2) y (1, 2).

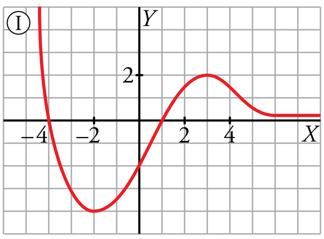
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

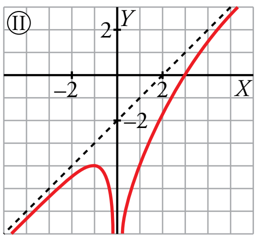
Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota oblicua en $y = x$.



29





Observa estas gráficas y describe:

a) Sus ramas infinitas, asíntotas y posición de la curva con respecto a ellas.

b) Sus puntos singulares, crecimiento y decrecimiento.

a) • Función I

Tiene una rama parabólica cuando $x \rightarrow -\infty$.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$ y la función queda por encima de la asíntota.

• Función II

La recta $y = x - 2$ es una asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$ y cuando $x \rightarrow +\infty$. En ambos casos, la función queda por debajo de la asíntota.

La recta $x = 0$ es una asíntota vertical y la función tiende a $-\infty$ por los dos lados.

b) • Función I

El punto (–2, –4) es un mínimo. El punto (3, 2) es un máximo.

Hay otro punto singular, (0,5; –1), pero no es ni máximo ni mínimo.

• Función II

Solo tiene un punto singular, el máximo (–1, –4).

30 **Dada la función** $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ **comprueba que:**

- **Tiene derivada nula en (0, 0).**
- **La recta** $y = 2$ **es una asíntota horizontal.**
- **La posición de la curva respecto a la asíntota es:**

  Si $x \to -\infty,\ y < 2$

  Si $x \to +\infty,\ y < 2$

Represéntala.

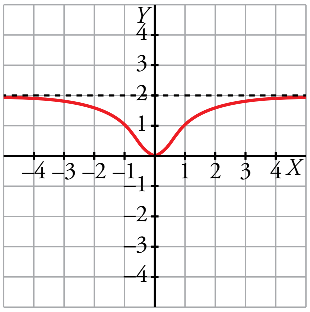
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en (0, 0) es nula.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal.

- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

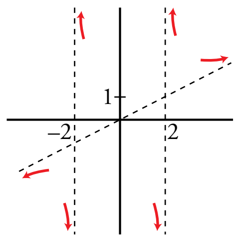
  Como la diferencia siempre es negativa, la función queda por debajo de la asíntota $y = 2$.

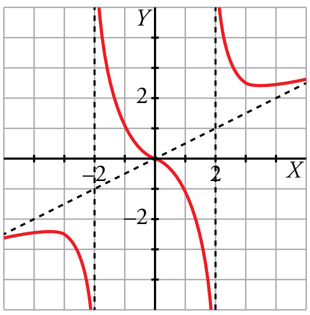


31 **Completa la gráfica de una función de la que sabemos que tiene tres puntos singulares:**

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

y que sus ramas infinitas son las representadas a la derecha.





Para resolver

32 **a) Halla el vértice de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ teniendo en cuenta que en ese punto la tangente es horizontal.**

b) Halla las coordenadas del vértice de una parábola cualquiera $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \to x = -3$

Punto $(-3, 2)$.

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \to 2ax + b = 0 \to x = \dfrac{-b}{2a}$ es la abscisa del vértice.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ es la ordenada de vértice.

33 **Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2, 1)$ y que pasa por el punto $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 1 \to 4a + 2b + c = 1 \\ f'(2) = 2 \to 4a + b = 2 \\ f(5) = -2 \to 25a + 5b + c = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -7 \end{array}$$

La función es $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

34 **Halla el valor de x para el que las tangentes a las curvas $y = 3x^2 - 2x + 5$ e $y = x^2 + 6x$ sean paralelas y escribe las ecuaciones de esas tangentes.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x^2 - 2x + 5 \to f'(x) = 6x - 2 \\ g(x) = x^2 + 6x \to g'(x) = 2x + 6 \end{array}\right\} 6x - 2 = 2x + 6 \to x = 2$$

Para $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 13 \to y = 10x - 7$

Para $g(x) = x^2 + 6x$ la tangente en $x = 2$ es:

$y = 10(x - 2) + 16 \to y = 10x - 4$

35 **Halla a, b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$ y que pase por $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4) = 0 \to 48 - 8a + b = 0 \\ f'(0) = 2 \to b = 0 \\ f(1) = 1 \to 1 + a + b + c = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{array}$$

La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

36 **La ecuación de la recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $4x - 3y + 1 = 0$. ¿Cuál es el valor de $f'(2)$? ¿Y el de $f(2)$?**

Despejamos y de la ecuación de la recta tangente: $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

$f'(2)$ es la pendiente de la recta tangente en $x = 2$, es decir, $f'(2) = \dfrac{4}{3}$.

Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de tangencia, $f(2) = \dfrac{4}{3} \cdot 2 + \dfrac{1}{3} = 3$.

37 **Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0, 1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2, –1) vale 0.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \ \rightarrow \ 1 = c \\ f(2) = -1 \ \rightarrow \ -1 = 4a + 2b + c \\ f'(2) = 0 \ \rightarrow \ 0 = 4a + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = 1/2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array}$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

38 **Representa las siguientes funciones hallando los puntos singulares y las ramas infinitas:**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^4 + 4x^3$ **c)** $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

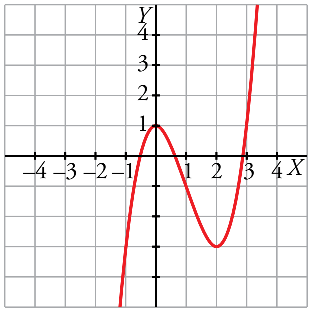
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 3x^2 - 6x = 0 \ \rightarrow \ x = 0, \ x = 2$

$f(0) = 2, \ f(2) = -3 \ \rightarrow$ Los puntos singulares son (0, 1) y (2, –3).

$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



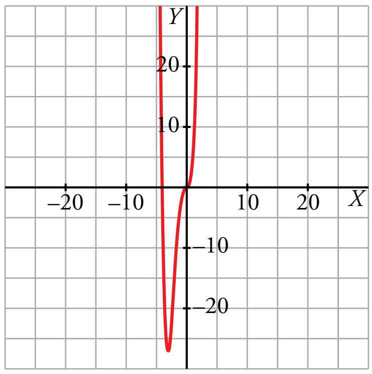
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 4x^3 + 12x^2 = 0 \ \rightarrow \ x = -3, \ x = 0$

$f(-3) = -27, \ f(0) = 0 \ \rightarrow$ Los puntos singulares son (–3, –27) y (0, 0).

$\lim_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$



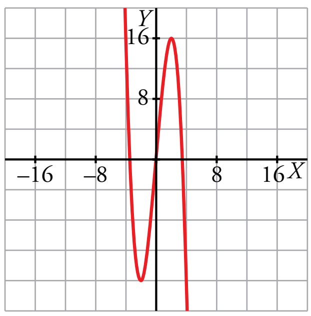
c) $f'(x) = 12 - 3x^2$

$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 12 - 3x^2 = 0 \ \rightarrow \ x = -2, \ x = 2$

$f(-2) = -16, \ f(2) = 16 \ \rightarrow$ Los puntos singulares son (–2, –16) y (2, 16).

$\lim_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$



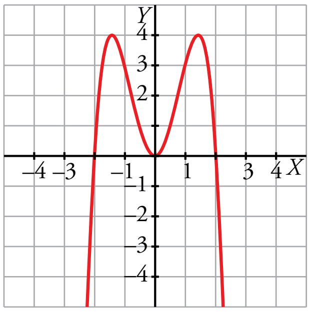
d) $f'(x) = -4x^3 + 8x$

$f'(x) = 0 \;\to\; -4x^3 + 8x = 0 \;\to\; x = -\sqrt{2},\; x = 0,\; x = \sqrt{2}$

$f\left(-\sqrt{2}\right) = 4,\; f(0) = 0,\; f\left(\sqrt{2}\right) = 4 \;\to$ Los puntos singulares son $\left(-\sqrt{2}, 4\right)$, $(0, 0)$ y $\left(\sqrt{2}, 4\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$



39 **Estudia y representa.**

a) $y = x^3 - 3x + 2$ **b)** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ **c)** $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **d)** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

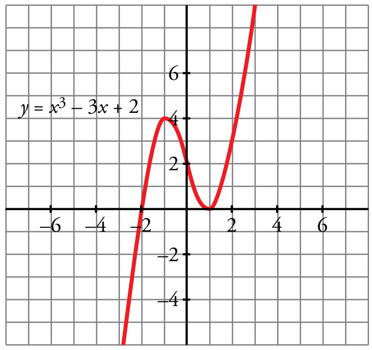
a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \;\to\; x = \pm 1$

$\begin{cases} f(1) = 0 \;\to\; (1, 0) \\ f(-1) = 4 \;\to\; (-1, 4) \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$



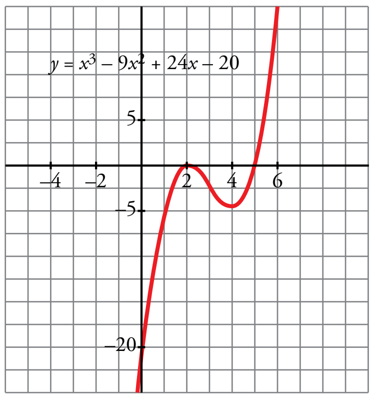
b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f'(x) = 0 \;\to\; x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \dfrac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} f(4) = -4 \;\to\; (4, -4) \\ f(2) = 0 \;\to\; (2, 0) \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = +\infty$

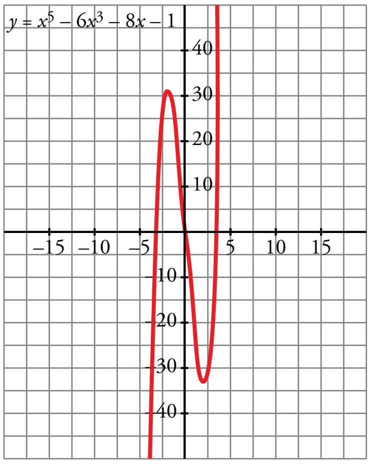


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

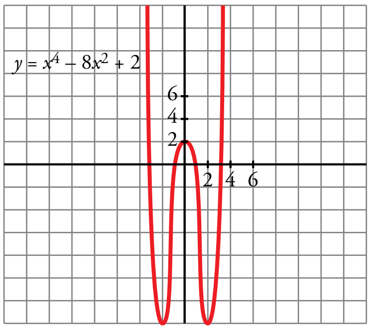


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 2 \rightarrow (0, 2) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -14 \rightarrow (2, -14) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -14 \rightarrow (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$

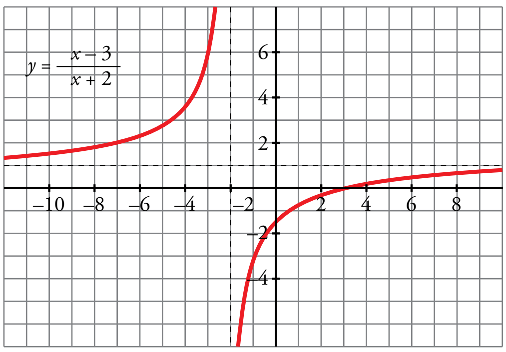


40 **Comprueba que estas funciones no tienen puntos de tangente horizontal. Represéntalas estudiando sus ramas infinitas y los puntos de corte con los ejes:**

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

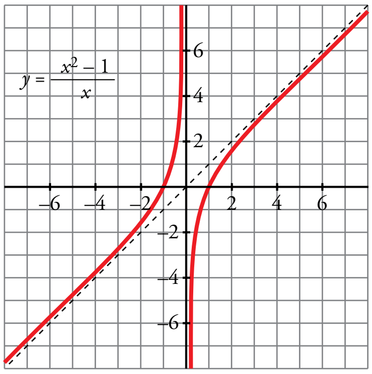
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



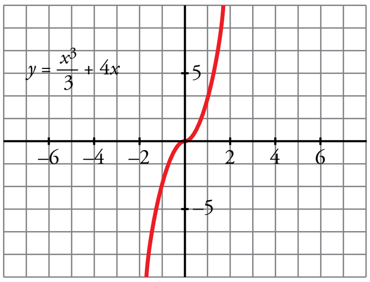
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Los puntos de corte son: (1, 0), (–1, 0)



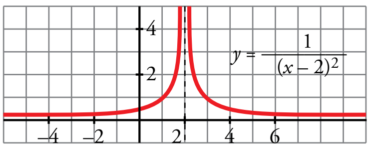
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punto de corte es (0, 0).



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punto de corte es $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 **Estudia y representa las siguientes funciones:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ **c)** $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 6x + 5}$

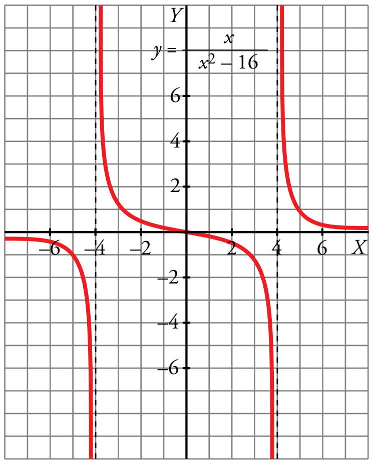
d) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x+2}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x+2}$ **f)** $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asíntotas verticales: $x = -4,\ x = 4$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.

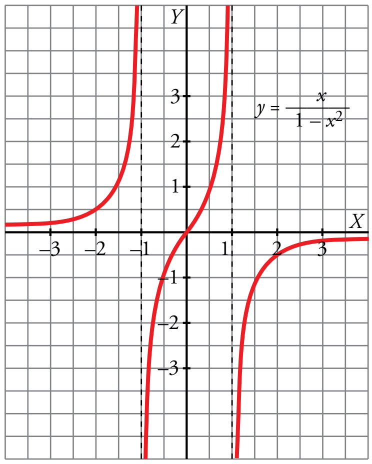


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1,\ x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas ni puntos de tangente horizontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

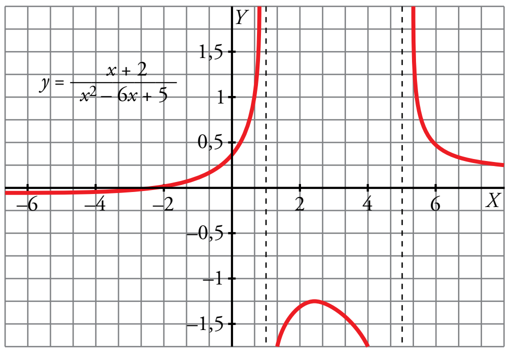
Asíntotas verticales: $x = 5,\ x = 1$

Asíntota horizontal: $y = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x + 2)^2}$

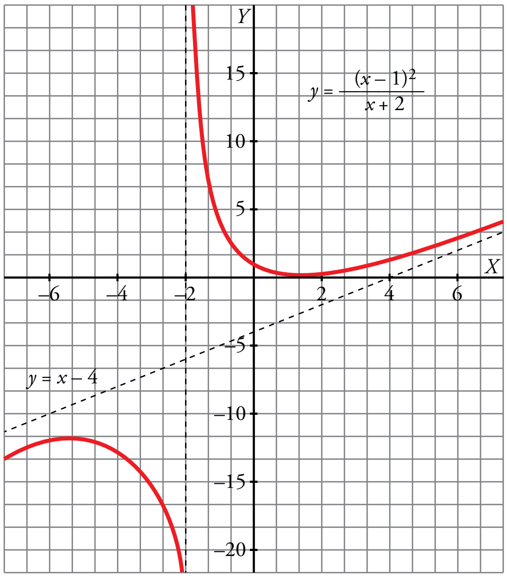
Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 4$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son:

$(1, 0)$, $(-5, 12)$



e) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}$

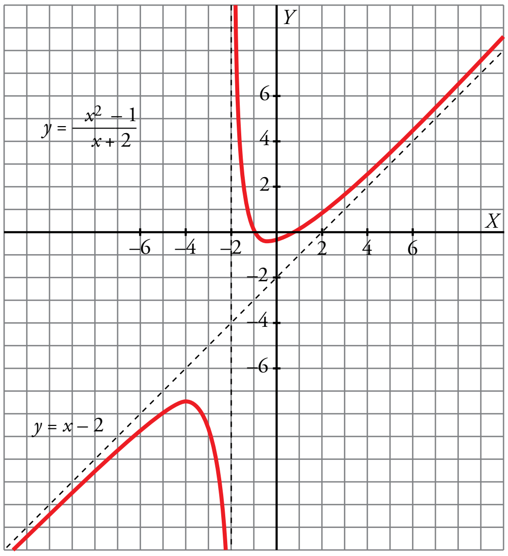
Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota oblicua: $y = x - 2$

No hay asíntotas horizontales.

Sus puntos de tangente horizontal son, aproximadamente:

$(-0{,}26; -0{,}54)$, $(-3{,}73; -7{,}46)$



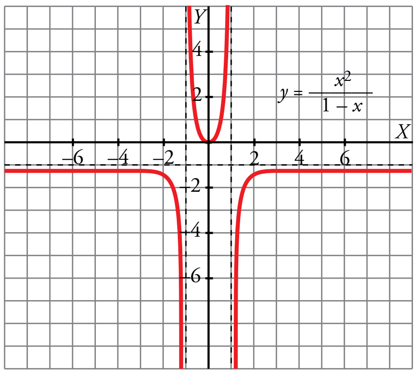
f) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1 - x^2)^2}$

Asíntotas verticales: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = -1$

No hay asíntotas oblicuas.

Punto de tangente horizontal: $(0, 0)$



Página 208

42 **Calcula el valor de a para que $f(x) = ln\left(\dfrac{x^2}{x + a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.**

$f(x) = 2ln\, x - ln\,(x + a)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x + a} \to f'(2) = 1 - \dfrac{1}{2 + a}$

$f'(2) = 0 \to 1 - \dfrac{1}{2 + a} = 0 \to a = -1$

43 **La función $h(t) = 50 + 30t - 5t^2$ (h en metros, t en segundos) muestra la altura de una pelota lanzada hacia arriba.**

a) Calcula su velocidad media entre $t = 0$ y $t = 2$.

b) ¿En qué instante la velocidad es igual a 0?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza y en qué momento lo consigue?

a) La velocidad media entre $t = 0$ y $t = 2$ es la tasa de variación media en el intervalo [0, 2].

$$\text{T.V.M. } [0, 2] = \frac{h(2) - h(0)}{2 - 0} = \frac{90 - 50}{2} = 20 \text{ m/s}$$

b) La velocidad será 0 cuando la pelota alcance su altura máxima. Por tanto, el instante t en el que la velocidad es máxima es un punto singular de $h(t)$.

$h'(t) = 30 - 10t$

$h'(t) = 0 \to 30 - 10t = 0 \to t = 3$

A los 3 segundos la velocidad es igual a 0.

c) $$\left.\begin{array}{l} \text{Si } t < 3, \text{ entonces } h'(t) > 0 \to h(t) \text{ crece} \\ \text{Si } t > 3, \text{ entonces } h'(t) < 0 \to h(t) \text{ decrece} \end{array}\right\} \to t = 3 \text{ es el máximo de la función.}$$

La altura máxima en $h(3) = 50 + 30 \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 = 95$ m y se alcanza a los 3 segundos.

44 **El coste total (en dólares) de fabricación de q unidades de cierto artículo es: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$**

El coste medio por unidad es: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el coste medio por unidad sea mínimo?

b) Calcula $C(q)$ y $M(q)$ para el valor de q que has hallado en el apartado a).

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$$M'(q) = \frac{(6q + 5)q - (3q^2 + 5q + 75)}{q^2} = \frac{6q^2 + 5q - 3q^2 - 5q - 75}{q^2} = \frac{3q^2 - 75}{q^2} = 0 \to$$

$\to q^2 = 25 \to q = 5$ unidades

Se deben fabricar 5 unidades.

b) $C(5) = 175$; $M(5) = 35$

45 **La función $f(x) = \dfrac{60x}{x^2 + 9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros, x en años).**

a) Represéntala gráficamente.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?

c) ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?

a) $$f'(x) = \frac{60(x^2 + 9) - 60x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{60x^2 + 540 - 120x^2}{(x^2 + 9)^2} = \frac{-60x^2 + 540}{(x^2 + 9)^2} = 0 \to$$

$\to x = 3$ ($x = -3$ no está en el dominio).

Máximo en (3, 10).

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \to$ asíntota horizontal: $y = 0$

La gráfica sería:

b) Beneficio máximo en $x = 3 \to$ A los 3 años.

El beneficio sería $f(3) = 10$ miles de euros.

c) No perderá dinero ni llegará un momento en que no obtenga beneficios ni pérdidas, pues $f(x) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.

46 **El coste de producción, en una empresa de electrodomésticos, de x unidades fabricadas, viene dado por la función $C(x) = x^2 + 80x + 10\,000$, $C(x)$ en euros. El precio de venta de una unidad es 880 €.**

a) Escribe la función que nos da el beneficio de la empresa si se venden todas las unidades fabricadas.

b) ¿Cuántas unidades se deben fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál será ese beneficio?

a) El beneficio es igual a los ingresos por ventas menos los costes de producción.

$B(x) = 880x - (x^2 + 80x + 10\,000) = -x^2 + 800x - 10\,000$

b) La gráfica de la función anterior es una parábola abierta hacia abajo. Por tanto, el máximo se alcanza en su vértice.

$x_0 = \dfrac{-800}{-2} = 400 \to B(400) = -400^2 + 800 \cdot 400 - 10\,000 = 150\,000$ €

El beneficio máximo es de 150 000 € y se obtiene fabricando 400 unidades.

47 **Determina, en cada caso, los valores máximo y mínimo de la función en el intervalo que se indica.**

a) $y = x^2 - 6x - 4$, $x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$, $x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2$, $x \in [-2, 4]$

d) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in [0, 2]$

Hallamos los puntos singulares que quedan dentro de los diferentes intervalos, evaluamos en ellos y en los extremos de los intervalos.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \to 2x - 6 = 0 \to x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El máximo se encuentra en $x = 0$ y vale -4.

El mínimo se encuentra en $x = 3$ y vale -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12x + 12 = 0 \to x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 83.

El mínimo se encuentra en $x = -1$ y vale -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 6x = 0 \to x = 0,\ x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El máximo se encuentra en $x = 4$ y vale 16.

El mínimo se encuentra en $x = -2$ y vale –20.

d) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \to \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \to x = -1,\ x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El máximo se encuentra en $x = 1$ y vale $\dfrac{1}{2}$.

El mínimo se encuentra en $x = 0$ y vale 0.

48 **El área de un rectángulo, en función de su base x, viene dada por la expresión $S(x) = 20x - x^2$, $x \in [8, 18]$. Halla el área máxima y el área mínima en ese intervalo.**

Los valores máximo y mínimo de una función en un intervalo de este tipo pueden darse en los extremos del intervalo o en los puntos singulares.

$S'(x) = 20 - 2x$

$S'(x) = 0 \to 20 - 2x = 0 \to x = 10$

Evaluamos:

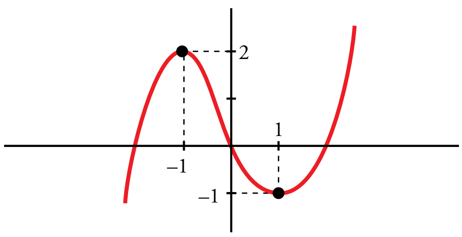
$S(8) = 20 \cdot 8 - 8^2 = 96 \quad S(10) = 20 \cdot 10 - 10^2 = 100 \quad S(18) = 20 \cdot 18 - 18^2 = 36$

El área máxima es 100 y se alcanza en $x = 10$.

El área mínima es 36 y se alcanza en $x = 18$.

Cuestiones teóricas

49 **Dibuja una función que tenga derivada nula en $x = 1$ y en $x = -1$, derivada negativa en el intervalo [–1, 1] y positiva para cualquier otro valor de x.**

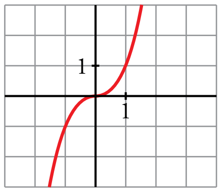


50 **Pon ejemplos de funciones f cuya derivada sea $f'(x) = 2x$. ¿Cuántas existen?**

Existen infinitas.

$f(x) = x^2 + k$, donde x es cualquier número.

51 **Esta es la gráfica de la función $y = x^3$.**



a) ¿Tiene algún punto singular?

b) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$?

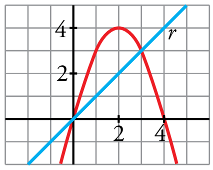
c) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en $x = 0$?

a) El punto (0, 0) tiene tangente horizontal. Este es el único punto singular.

b) La función es creciente en $x = 0$.

c) La recta tangente en $x = 0$ es $y = 0$.

52 **¿Existe algún punto de la función $y = 4x - x^2$ en el que la tangente sea paralela a la recta r? En caso afirmativo, hállalo.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4 - 2x \\ \text{Pendiente de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4 - 2x = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

Punto $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{15}{4}\right)$

53 **Sabiendo que $f'(2) = 0$, ¿cuál de estas afirmaciones es correcta?**

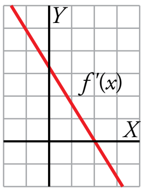
a) La función f tiene máximo o mínimo en $x = 2$.

b) La recta tangente en $x = 2$ es horizontal.

c) La función pasa por el punto (2, 0).

La correcta es la b).

54



Esta es la gráfica de f', la función derivada de f.

a) ¿Tiene f algún punto de tangente horizontal?

b) ¿Es f creciente o decreciente?

a) Sí, en $x = 2$, puesto que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$, es creciente, pues $f' > 0$; y si $x > 2$, es decreciente, pues $f' > 0$.

55 **Sabemos que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ y $h(x) = e^{f(x)}$. ¿Cuál de estos tres valores corresponde a $h'(0)$?:**

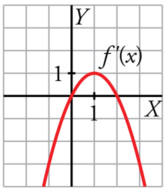
a) $\dfrac{1}{e}$ **b) 0** **c) 1**

$h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

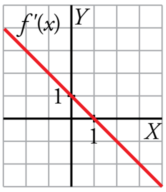
Por tanto, $h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$, que se corresponde con b).

56 **¿Cuál de estas gráficas corresponde a la función derivada de una curva que tiene un máximo en $x = 1$? ¿Por qué?:**

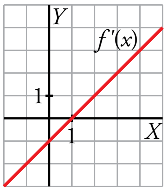
a)



b)

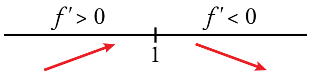


c)



La gráfica del apartado b), porque $f'(1) = 0$.

Además,



En consecuencia, $x = 1$ es un máximo.

57 **¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.**

a) Si $f'(a) > 0$, entonces f es creciente en $x = a$.

b) Si $f'(a) = 0$, entonces f no crece ni decrece en $x = a$.

c) Si f es decreciente en $x = a$, entonces $f'(a) < 0$.

a) Verdadero.

b) Falso. Hay funciones con puntos singulares donde la función es creciente. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en el punto singular (0, 0).

c) Falso. La función $f(x) = -x^3$ siempre es decreciente y $f'(0) = 0$.

Página 209

Para profundizar

58 **Dada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, halla el valor de a y b para que la recta tangente a f en $x = -2$ sea $y = 2x - 3$.**

La recta tangente y la función coinciden en el punto de tangencia cuyas coordenadas son:

$x = -2 \rightarrow y = 2(-2) - 3 = -7$

Por tanto, la función pasa por el punto (–2, –7), es decir, $f(-2) = -7$.

Por otra parte, $f'(-2) = 2$, ya que la pendiente de la recta tangente es 2.

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2\cdot(-2)^3 + 12\cdot(-2)^2 + a\cdot(-2) + b = -7 \\ 6\cdot(-2)^2 + 24\cdot(-2) + a = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = 26,\ b = 13$$

59 a) Calcula el valor que debe tener k para que la función $f(x) = x - \frac{k}{x}$ tenga un máximo en $x = 1$.

b) Después de hallar k, estudia y representa la función obtenida.

a) Si $f(x)$ tiene un máximo en $x = 1$, entonces $f'(1) = 0$.

$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2}$

$f'(1) = 0 \rightarrow 1 + \frac{k}{1} = 0 \rightarrow k = -1$

Por tanto, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ y $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

b) • Dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asíntotas verticales:

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty \rightarrow$ La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Posición:

IZQUIERDA: $x = -0{,}01 \rightarrow f(-0{,}01) = -0{,}01 + \frac{1}{-0{,}01} = -100{,}01 \rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

DERECHA: $x = 0{,}01 \rightarrow f(0{,}01) = 0{,}01 + \frac{1}{0{,}01} = 100{,}01 \rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

• Por la expresión de $f(x)$, la recta $y = x$ es una asíntota oblicua.

Calculamos $f(x) - x = \frac{1}{x}$ para estudiar su posición:

— Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - x > 0 \rightarrow f(x)$ está encima de la asíntota.

— Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - x < 0 \rightarrow f(x)$ está debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

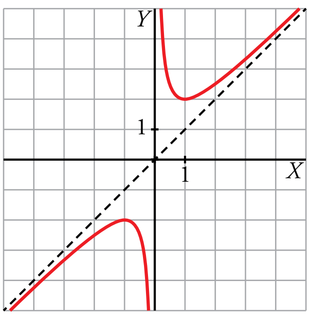
$f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1, \; x = 1$

$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$

$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

Los puntos $(1, 2)$ y $(-1, -2)$ son puntos singulares.

• Gráfica:



60 **En los estudios de mercado previos a su implantación en una zona, una franquicia de tiendas ha estimado que sus beneficios semanales, en miles de euros, dependen del número de tiendas que tengan en la zona, según la expresión $B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$, siendo n el número de tiendas. Determina el número de tiendas que deben abrir para maximizar sus beneficios semanales, y el valor de dichos beneficios.**

Calculamos los puntos singulares de la función beneficios:

$$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96$$

$$B'(n) = 0 \to -24n^2 + 120n - 96 = 0 \to n^2 - 5n + 4 = 0 \to n = 1,\ n = 4$$

$$B(1) = -8 + 60 - 96 = -44$$

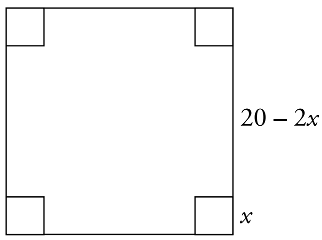
$$B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 = 64$$

Los puntos $(1, -44)$ y $(4, 64)$ son puntos singulares de la función beneficios.

El máximo se da abriendo 4 tiendas, y es de 64 000 €.

61 **De una cartulina cuadrada de 20 cm de lado, se cortan cuadrados de lado x en cada esquina para hacer una caja sin tapa.**

Calcula el lado del cuadrado que hay que cortar para que el volumen de la caja sea máximo.



La caja que se obtiene plegando esta cartulina mide $20 - 2x$, tanto de largo como de ancho, y x de alto. Por tanto, el volumen en función de x es:

$$V(x) = (20 - 2x)(20 - 2x)x = 4x^3 - 80x^2 + 400x \text{ con } 0 < x < 10$$

Hallamos sus puntos singulares:

$$V'(x) = 12x^2 - 160x + 400$$

$$V'(x) = 0 \to 12x^2 - 160x + 400 = 0 \to 3x^2 - 40x + 100 = 0 \to x = 10,\ x = \frac{10}{3}$$

El primer resultado no tiene sentido porque no está en el dominio de definición.

$$x = \frac{10}{3} \to V\left(\frac{10}{3}\right) = 4\left(\frac{10}{3}\right)^3 - 80\left(\frac{10}{3}\right)^2 + 400 \cdot \frac{10}{3} = \frac{16000}{27} = 592{,}59 \text{ cm}^3$$

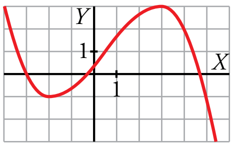
Solo queda comprobar que el punto $x = \frac{10}{3}$ es un máximo:

Si $0 < x < \frac{10}{3}$, entonces $V'(x) > 0 \to V(x)$ es creciente.

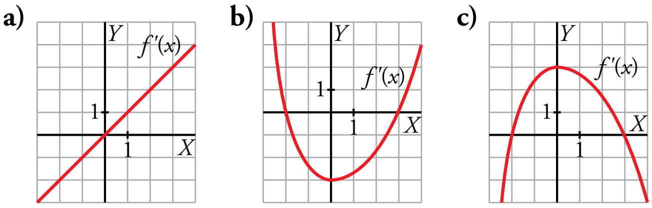
Si $\frac{10}{3} < x < 10$, entonces $V'(x) < 0 \to V(x)$ es decreciente.

Como la función crece a la izquierda de $x = \frac{10}{3}$ y decrece a la derecha, este punto es un máximo. El volumen máximo es de 592,59 cm³.

62 **Esta es la gráfica de una función $y = f(x)$.**



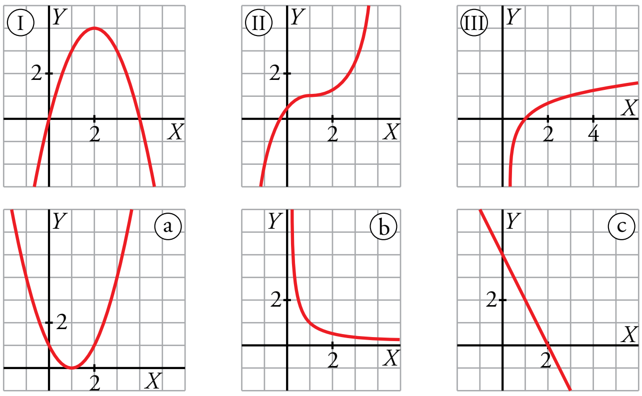
¿Cuál de las siguientes gráficas puede ser la de $f'(x)$? Justifícalo:



La gráfica del apartado c), porque $f'(-2) = f'(3) = 0$ al ser $x = -2$ y $x = 3$ puntos singulares de $f(x)$.

Como $f(x)$ crece en el intervalo $(-2, 3)$, $f'(x) > 0$ y esto solo curre en el apartado c). El resto de la gráfica de c) es coherente con la de $f(x)$.

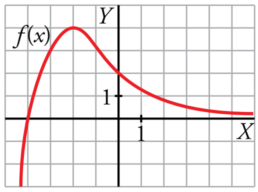
63 **Asocia a cada una de las gráficas I, II, III la gráfica de su función derivada.**



I → c II → a III → b

Autoevaluación

1 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.**



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

a) $\text{T.V.M. } [0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

2 **Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.**

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $y = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$

c) $y = 3x^2 \cos(x + \pi)$ **d)** $y = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{x^3}$$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$$

c) $f'(x) = 6x \cos(x + \pi) + 3x^2 [-sen\,(x + \pi)] = 3x[2\cos(x + \pi) - x\, sen\,(x + \pi)]$

d) $$f'(x) = 3\left(\frac{x^2}{x - 2}\right)^2 D\left(\frac{x^2}{x - 2}\right) = 3\frac{x^4}{(x - 2)^2} \cdot \frac{2x(x - 2) - x^2}{(x - 2)^2} = \frac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x - 2)^4}$$

4 Escribe la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x}{2}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Calculamos la ordenada de $x = 1$:

$$f(1) = \frac{1-5}{2} = -2$$

Hallamos la pendiente de la recta tangente, $m = f'(1)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 5) \to f'(1) = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$$

Con el punto (1, –2) y la pendiente $m = -1$, escribimos la ecuación:

$$y = -2 - 1(x - 1) \to y = -x - 1$$

5 Halla los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la recta tangente es paralela a la recta $y = x$.

Tenemos que hallar los puntos cuya derivada es 1.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 1 \to 3x^2 - 6x = 0 \to 3x(x - 2) = 0 \to x = 0,\ x = 2$$

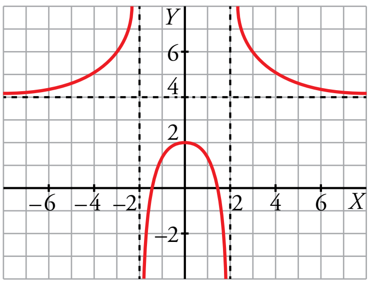
$$f(0) = 0;\ f(2) = -2$$

Los puntos en los que la recta tangente es paralela a $y = x$ son (0, 0) y (2, –2).

6 Observa la gráfica y describe:

a) Sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Sus puntos singulares y sus intervalos de crecimiento.



a) • Asíntotas verticales: rectas $x = -2$ y $x = 2$

Posición:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

• Asíntota horizontal: recta $y = 4$

Posición:

Si $x \to +\infty$, $f(x) > 4$

Si $x \to -\infty$, $f(x) < 4$

b) El punto (0, 2) es un máximo de la función.

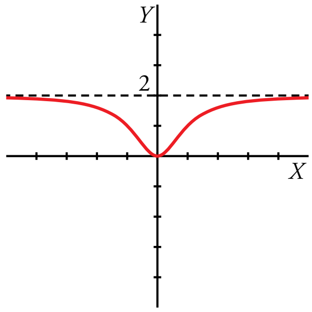
Los intervalos de crecimiento son $(-\infty, 2) \cup (-2, 0)$.

Los intervalos de decrecimiento son $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

7 **Representa la función $y = f(x)$ de la que conocemos:**

- **Dominio de definición: $\mathbb{R}$**
- **Mínimo: (0, 0)**
- **Asíntota horizontal: $y = 2$**
- **Si $x \to +\infty$, $f(x) < 2$**
- **Si $x \to -\infty$, $f(x) < 2$**

¿A cuál de estas funciones corresponde esa gráfica?



a) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

La función del apartado b) no puede ser porque tiene asíntotas verticales y no se afirma nada sobre esto en el enunciado.

La función del apartado a) no puede ser porque es negativa a la izquierda de 0, y, por tanto, el punto (0, 0) no sería un mínimo de la función.

La gráfica se corresponde con la función del apartado c).

8 **a) Estudia las ramas infinitas y los puntos singulares de la función $f(x) = x^3 - 12x + 6$. ¿Tiene máximo o mínimo?**

b) Represéntala gráficamente.

a) Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$$

Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \to x = -2,\ x = 2$

$x = -2 \to f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 6 = 22$

$x = 2 \to f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 6 = -10$

Los puntos (–2, 22) y (2, –10) son puntos singulares.

El punto (–2, 22) es un máximo y el (2, –10) es un mínimo por la posición de las ramas infinitas.

b) Gráfica: