

# Unidad 3.

## Clasificación de funciones

### 1. Estudio gráfico de una función

#### Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes funciones es polinómica y cuál racional:

a)  $f(x) = \frac{2x + 5}{x^2 - 4}$

b)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$

#### Solución:

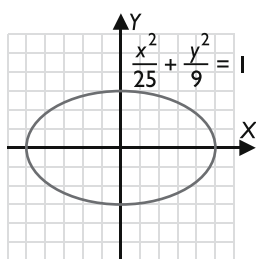
a) Racional.

b) Polinómica.

#### Aplica la teoría

Indica si cada una de las siguientes gráficas es o no una función y razona la respuesta.

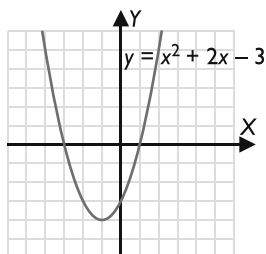
1



#### Solución:

No es una función. Por ejemplo, para  $x = 0$  existen dos valores de  $y$ , el 3 y el -3

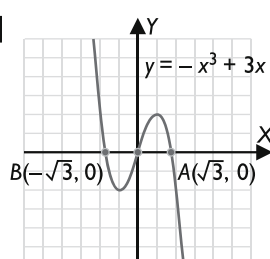
2



#### Solución:

Sí es una función, porque para cada valor de  $x$  existe un único valor de  $y$

3



#### Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
  2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
  3. Continuidad: es continua en todo  $\mathbb{R}$
  4. Periodicidad: no es periódica.
  5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$
  6. Asíntotas: no tiene.
  7. Corte con los ejes:
    - Eje X:  $B(-\sqrt{3}, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $A(\sqrt{3}, 0)$
    - Eje Y:  $O(0, 0)$
- Signo:
- Positiva (+):  $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
  - Negativa (-):  $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

a) Máximo relativo:  $C(1, 2)$

b) Mínimo relativo:  $D(-1, -2)$

Monotonía:

– Creciente:  $(-1, 1)$

– Decreciente:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:  $O(0, 0)$

Curvatura:

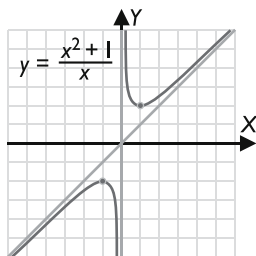
– Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, 0)$

– Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, +\infty)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

4



**Solución:**

1. Tipo de función: racional.

2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. Continuidad: es discontinua en  $x = 0$

4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

– Verticales:  $x = 0$

– Horizontales: no tiene.

– Oblicuas:  $y = x$

7. Corte con los ejes: no corta a ninguno de los ejes.

Signo:

– Positiva (+):  $(0, +\infty)$

– Negativa (-):  $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

a) Máximo relativo:  $A(-1, -2)$

b) Mínimo relativo:  $B(1, 2)$

Monotonía:

– Creciente:  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

– Decreciente:  $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

– Convexa ( $\cup$ ):  $(0, +\infty)$

– Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, 0)$

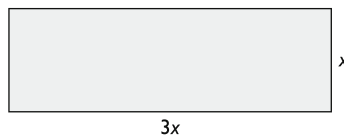
10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

## 2. Funciones reales de variable real

### Piensa y calcula

Considera los rectángulos con un lado de triple longitud que el otro. Expresa el perímetro y el área en función del lado menor.

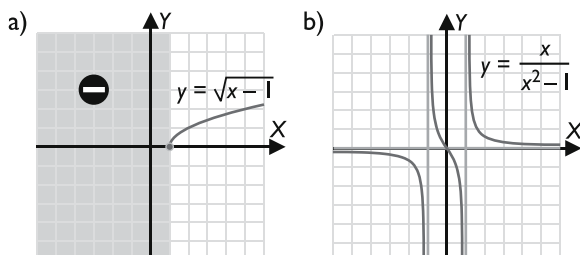


**Solución:**

$$P(x) = 8x; A(x) = 3x^2$$

### Aplica la teoría

5 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:



**Solución:**

a) Irracional.  $\text{Dom}(f) = [1, +\infty)$

b) Racional.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

6 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = x^3 - 4x^2 + 5 & \text{b) } y = \frac{4}{x-5} \\ \text{c) } y = \frac{x+3}{x^2-4} & \text{d) } y = \sqrt{x+1} \end{array}$$

**Solución:**

a) Polinómica.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Racional.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$$

c) Racional.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} =$

$$= (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$

d) Irracional.  $\text{Dom}(f) = [-1, +\infty)$

**7** Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

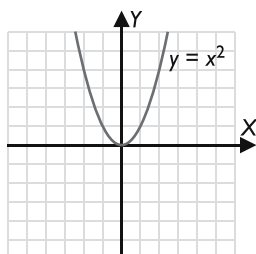
- a)  $y = 2^x$
- b)  $y = \log x$
- c)  $y = \log_2 (x - 3)$
- d)  $y = \sin (x + 1)$

**Solución:**

- a) Exponencial.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- b) Logarítmica.  $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
- c) Logarítmica.  $\text{Dom}(f) = (3, +\infty)$
- d) Trigonométrica.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

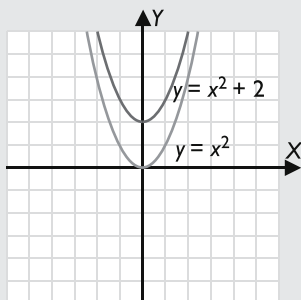
**8** A partir de la gráfica de  $y = f(x)$ , dibuja la traslación que se pide en cada caso y halla su ecuación.

- a)  $f(x) + 2$
- b)  $f(x + 2)$
- c)  $f(x - 1)$
- d)  $f(x - 2) + 1$



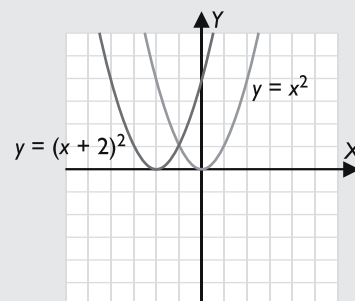
**Solución:**

a)



$$y = x^2 + 2$$

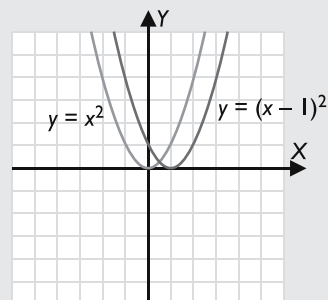
b)



$$y = (x + 2)^2$$

$$y = x^2 + 4x + 4$$

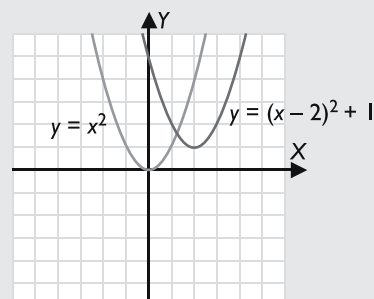
c)



$$y = (x - 1)^2$$

$$y = x^2 - 2x + 1$$

d)



$$y = (x - 2)^2 + 1$$

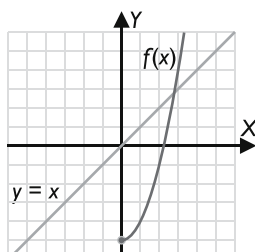
$$y = x^2 - 4x + 5$$

## 3. Operaciones con funciones

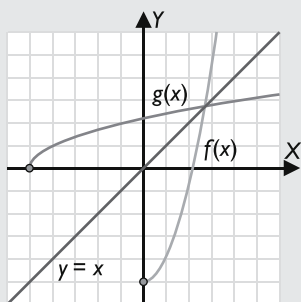
### Piensa y calcula

Dada la gráfica de la función  $f(x)$ , dibuja la gráfica  $g(x)$  simétrica respecto de la recta  $y = x$

Calcula el dominio y el recorrido o imagen de  $f(x)$  y de  $g(x)$ . ¿Qué relación existe entre ellos?



**Solución:**



$$\text{Dom}(f) = [0, +\infty), \text{Im}(f) = [-5, +\infty)$$

$$\text{Dom}(g) = [-5, +\infty), \text{Im}(g) = [0, +\infty)$$

$$\text{Dom}(f) = \text{Im}(g) \text{ y } \text{Dom}(g) = \text{Im}(f)$$

## Aplica la teoría

**9** Calcula  $g \circ f$  y  $f \circ g$  en cada uno de estos casos:

a)  $f(x) = \sqrt{x}$  y  $g(x) = x^2 + 2$

b)  $f(x) = x^2 - 3x$  y  $g(x) = x + 2$

**Solución:**

a)  $(g \circ f)(x) = x + 2, (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

b)  $(g \circ f)(x) = x^2 - 3x + 2$

$(f \circ g)(x) = x^2 + x - 2$

**10** Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a)  $y = 3x + 2$

b)  $y = \sqrt{x-1}$

c)  $y = \frac{x+2}{x-3}$

d)  $y = x^2 + 3; x \geq 0$

**Solución:**

a)  $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

b)  $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

c)  $f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{x-1}$

d)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$

**11** Indica si las siguientes funciones son pares, impares o no son ni pares ni impares, y calcula su simetría:

a)  $y = x^2 - 9$

b)  $y = x^2 - 4x$

c)  $y = \frac{2}{x}$

d)  $y = \frac{3x-5}{x-2}$

**Solución:**

a) Par  $\Rightarrow$  Simétrica respecto del eje Y

b) Ni par, ni impar.

c) Impar  $\Rightarrow$  Simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$

d) Ni par, ni impar.

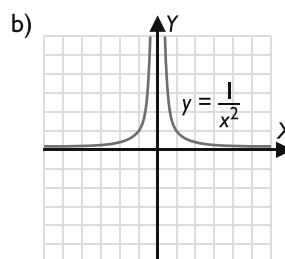
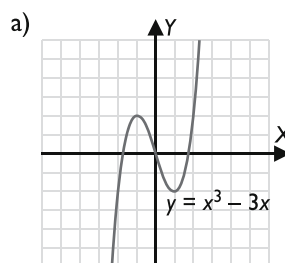
**12** Calcula la composición  $f \circ g$  y  $g \circ f$ , siendo  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$

**Solución:**

$$f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

$$g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

**13** Indica si las siguientes funciones son pares o impares analizando la gráfica:



**Solución:**

a) Impar  $\Rightarrow$  Simétrica respecto del origen  $O(0, 0)$

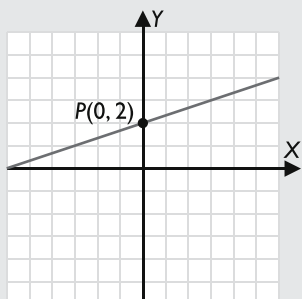
b) Par  $\Rightarrow$  Simétrica respecto del eje Y

## 4. Funciones polinómicas

### Piensa y calcula

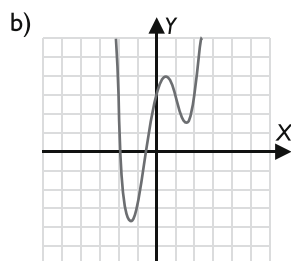
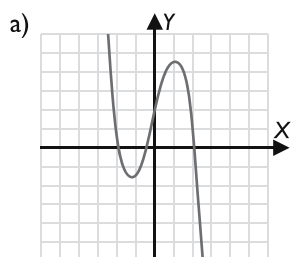
Dibuja una recta que tenga de pendiente  $\frac{1}{3}$  y pase por el punto  $P(0, 2)$

**Solución:**



### Aplica la teoría

**14** Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?



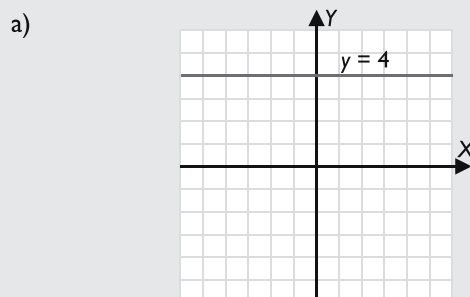
**Solución:**

- a) De 3.<sup>er</sup> grado. El coeficiente principal es negativo.
- b) De 4.<sup>o</sup> grado. El coeficiente principal es positivo.

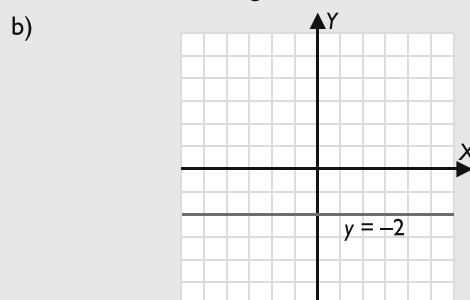
**15** Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen:

- a)  $y = 4$
- b)  $y = -2$
- c)  $y = \frac{3x}{2}$
- d)  $y = -2x$
- e)  $y = x + 3$
- f)  $y = -\frac{2x}{3} + 4$

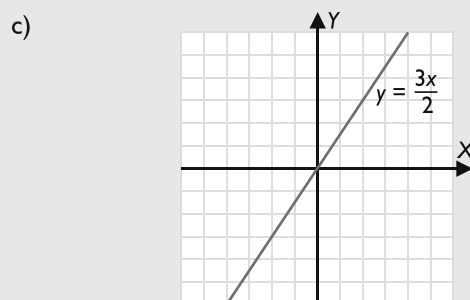
**Solución:**



$m = 0$   
Ordenada en el origen: 4

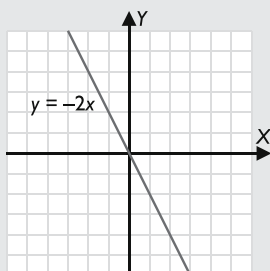


$m = 0$   
Ordenada en el origen: -2



$m = \frac{3}{2}$   
Ordenada en el origen: 0

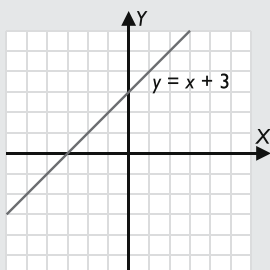
d)



$$m = -2$$

Ordenada en el origen: 0

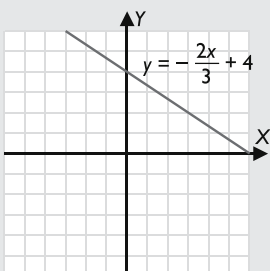
e)



$$m = 1$$

Ordenada en el origen: 3

f)

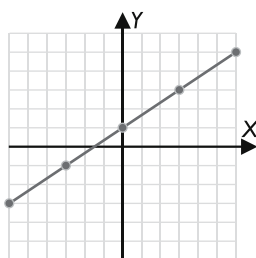


$$m = -\frac{2}{3}$$

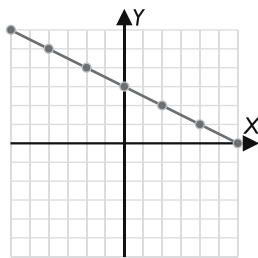
Ordenada en el origen: 4

**16** Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

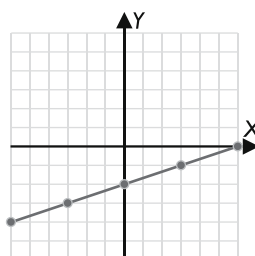
a) Recta roja



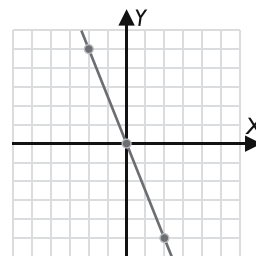
a) Recta azul



b) Recta roja



b) Recta azul



**Solución:**

a) Recta roja  $y = \frac{2x}{3} + 1$

a) Recta azul  $y = -\frac{x}{2} + 3$

b) Recta roja  $y = \frac{x}{3} - 2$

b) Recta azul  $y = -\frac{5x}{2}$

**17** En un mercado de mochilas las funciones de oferta y demanda son  $O(x) = 100 + 20x$  y  $D(x) = 1500 - 50x$

a) Encuentra la cantidad de equilibrio.

b) ¿A qué precio se producirá una escasez de 700 mochilas?

c) A un precio de 25 €, ¿qué ocurrirá en el mercado?

**Solución:**

a)  $O(x) = D(x) \Rightarrow 100 + 20x = 1500 - 50x \Rightarrow x = 20$

Para un precio de 20 € la oferta es  $O(20) = 500$

La cantidad de equilibrio será de 500 mochilas a un precio de 20 €/mochila.

b) Existe escasez cuando la oferta es menor que la demanda. Si la escasez es de 700 unidades, se tiene  $O(x) = D(x) - 700$

$$100 + 20x = 1500 - 50x - 700 \Rightarrow 70x = 700 \Rightarrow x = 10$$

Se producirá esa escasez cuando el precio sea de 10 €

c) Si  $x = 25$  € se tiene  $O(25) = 600$  y  $D(25) = 250$

Hay exceso de oferta.

## 5. Funciones cuadráticas

### Piensa y calcula

Dada la fórmula del eje de simetría de una parábola  $x = -\frac{b}{2a}$ , despeja mentalmente  $b$

En una parábola, se conoce el eje  $x = 3$  y  $a = 1$ . ¿Cuánto vale  $b$ ?

**Solución:**

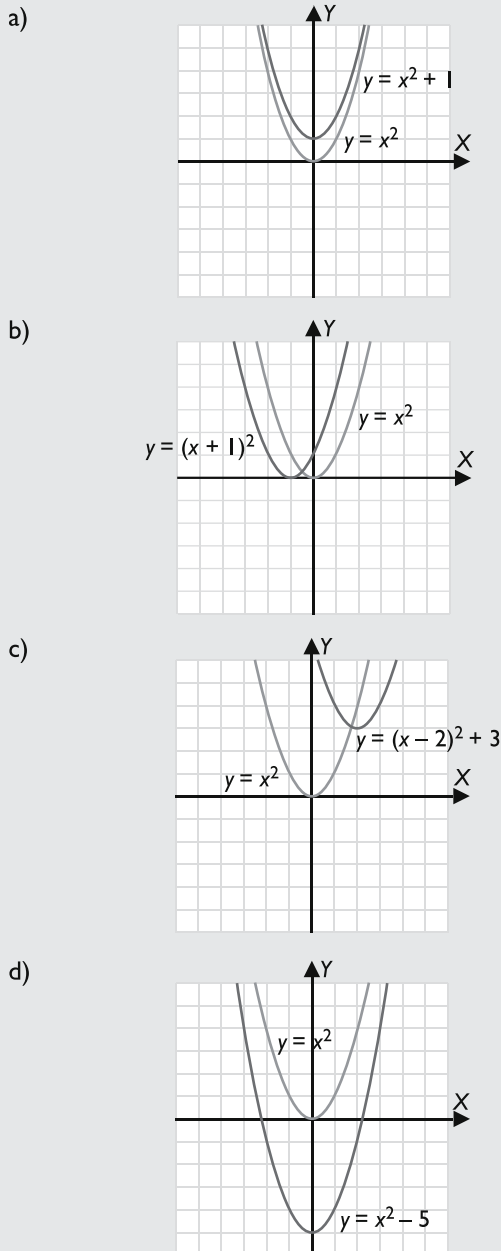
$$b = -2ax \Rightarrow b = -6$$

## Aplica la teoría

**18** Representa la parábola  $y = x^2$ , y, a partir de ella, las siguientes funciones:

- a)  $y = x^2 + 1$
- b)  $y = (x + 1)^2$
- c)  $y = (x - 2)^2 + 3$
- d)  $y = x^2 - 5$

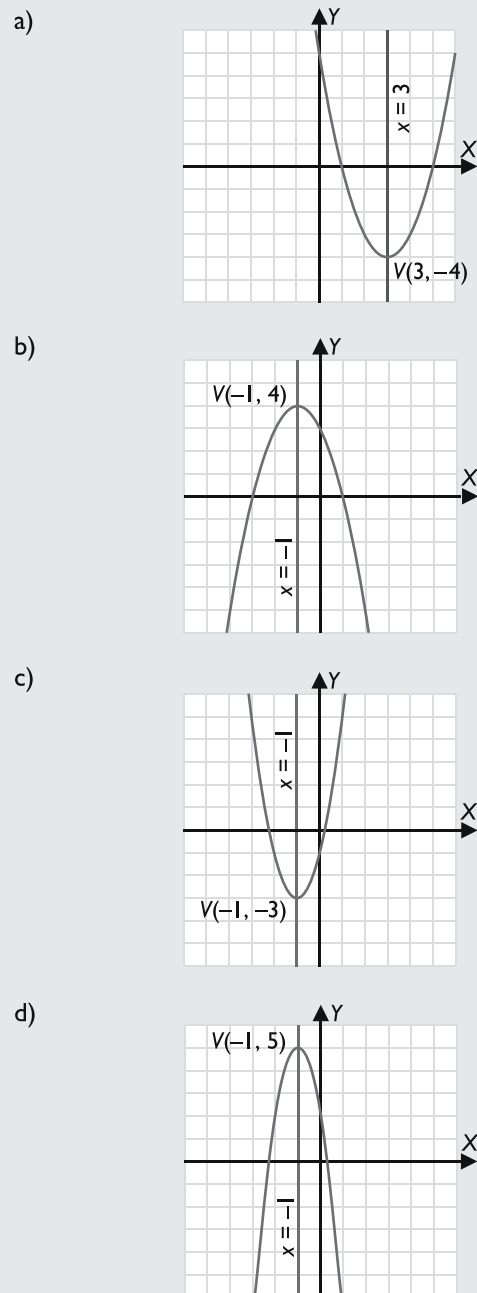
**Solución:**



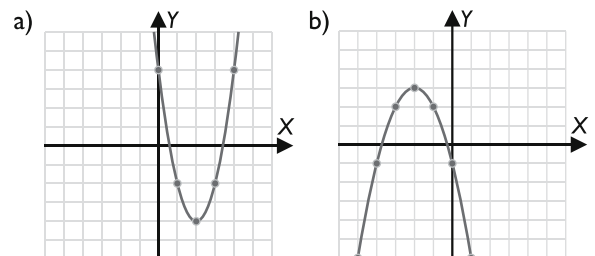
**19** Representa las siguientes parábolas:

- a)  $y = x^2 - 6x + 5$
- b)  $y = -x^2 - 2x + 3$
- c)  $y = 2x^2 + 4x - 1$
- d)  $y = -3x^2 - 6x + 2$

**Solución:**



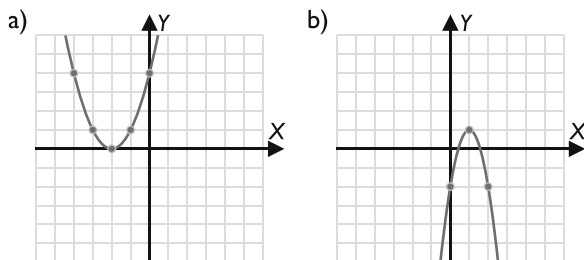
**20** Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:



**Solución:**

- a)  $y = 2x^2 - 8x + 4$
- b)  $y = -x^2 - 4x - 1$

**21** Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:



**Solución:**

a)  $y = x^2 + 4x + 4$

b)  $y = -3x^2 + 6x - 2$

**22** El número de bolígrafos vendidos en una papelería viene dado por la función  $f(x) = 6 - x$ , siendo  $x$  el precio en euros. Calcula:

a) La función de ingresos,  $I(x)$

b) El número de bolígrafos que hay que vender para que los ingresos sean máximos.

**Solución:**

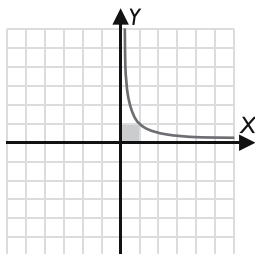
a)  $I(x) = 6x - x^2$

b)  $V(3, 9)$ , que es el máximo. Hay que vender 3 bolígrafos.

## 6. Funciones racionales e irracionales

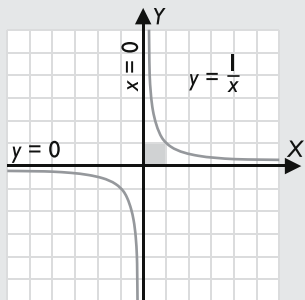
### Piensa y calcula

Analiza si la siguiente función  $f(x) = 1/x$  es impar y dibuja en tu cuaderno la parte de gráfica que falta y las asíntotas.



**Solución:**

Sí es impar.



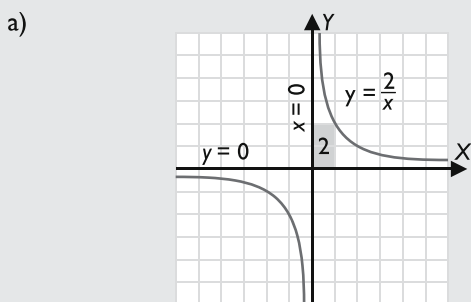
### Aplica la teoría

**23** Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante,  $k$ , de proporcionalidad inversa:

a)  $y = \frac{2}{x}$

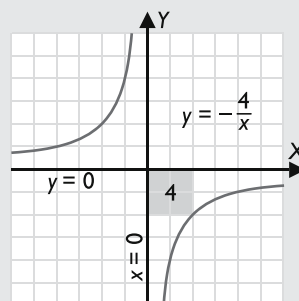
b)  $y = -\frac{4}{x}$

**Solución:**



$k = 2$

b)



$k = -4$

**24** Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante  $k$

a)  $y = \frac{x+3}{x+1}$

b)  $y = \frac{3x-5}{x-2}$

c)  $y = \frac{2x-5}{x-1}$

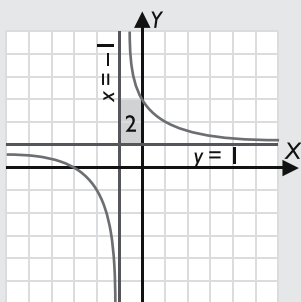
d)  $y = -\frac{x+1}{x+2}$



**Solución:**

a)

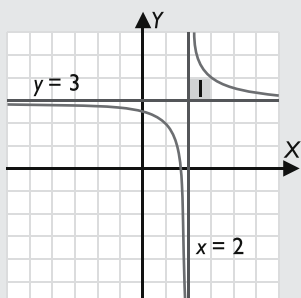
$$y = \frac{2}{x+1} + 1$$



$$k = 2$$

b)

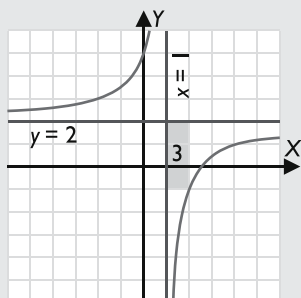
$$y = \frac{1}{x-2} + 3$$



$$k = 1$$

c)

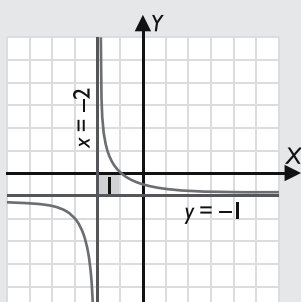
$$y = \frac{-3}{x-1} + 2$$



$$k = -3$$

d)

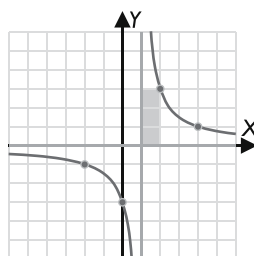
$$y = \frac{1}{x+2} - 1$$



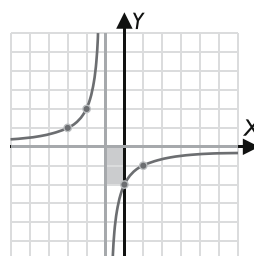
$$k = 1$$

**25** Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)

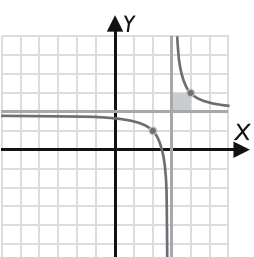
**Solución:**

$$a) y = \frac{3}{x-1}$$

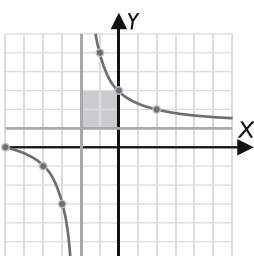
$$b) y = -\frac{2}{x+1}$$

**26** Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)

**Solución:**

$$a) y = \frac{1}{x-3} + 2$$

$$b) y = \frac{4}{x+2} + 1$$

**27** Dibuja las siguientes funciones irracionales:

$$a) y = \sqrt{x-1}$$

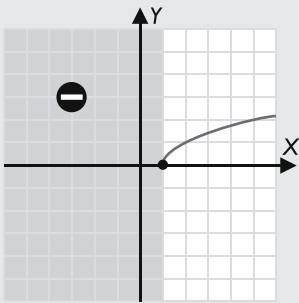
$$b) y = -2 + \sqrt{x-1}$$

$$c) y = -\sqrt{x+2}$$

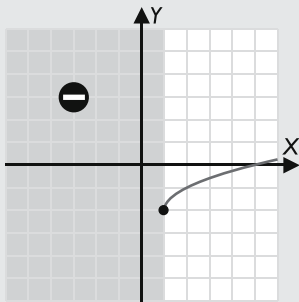
$$d) y = 3 - \sqrt{2-x}$$

**Solución:**

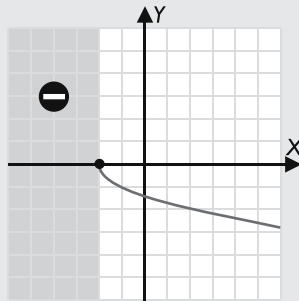
a)



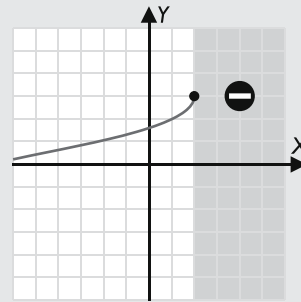
b)



c)

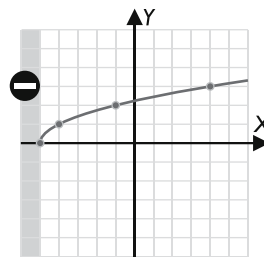


d)

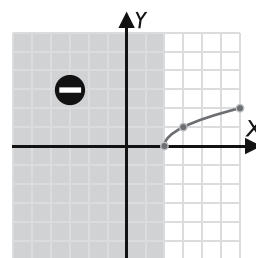


**28** Escribe la fórmula de las siguientes funciones irracionales:

a)



b)



**Solución:**

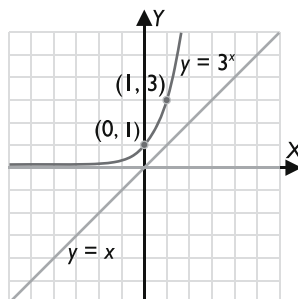
a)  $y = \sqrt{x + 5}$

b)  $y = \sqrt{x - 2}$

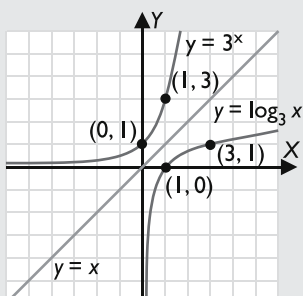
## 7. Funciones exponenciales y logarítmicas

### Piensa y calcula

Observando la gráfica correspondiente de  $y = 3^x$ , dibuja en tu cuaderno la gráfica de la función  $y = \log_3 x$ , sabiendo que es inversa de la anterior.



**Solución:**



## Aplica la teoría

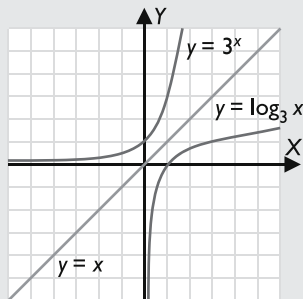
**29** Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

a)  $y = 3^x$

b)  $y = \log_3 x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

**Solución:**



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes,  $y = x$ ; por tanto, una es inversa de la otra.

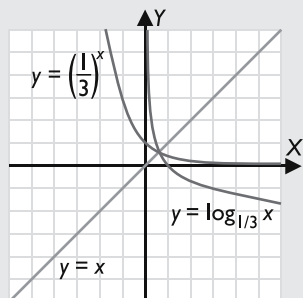
**30** Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones siguientes y sus asíntotas:

a)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b)  $y = \log_{1/3} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

**Solución:**



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes,  $y = x$ ; por tanto, una es inversa de la otra.

**31** Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a)  $y = 1 + 2^x$

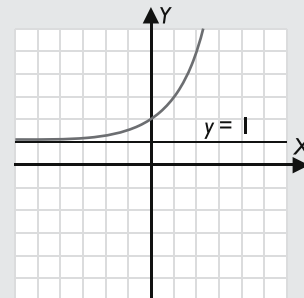
b)  $y = -5 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c)  $y = 2^{x-3}$

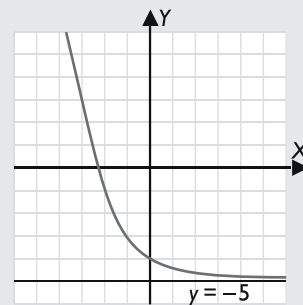
d)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

**Solución:**

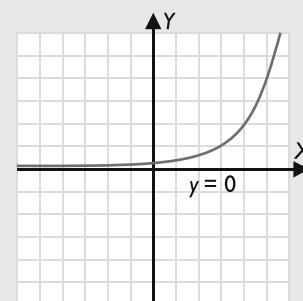
a)



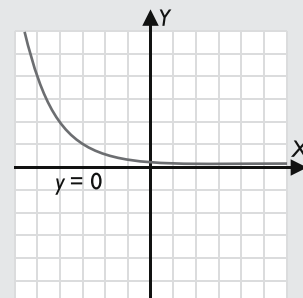
b)



c)



d)



**32** Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a)  $y = 3 + \log_2 x$

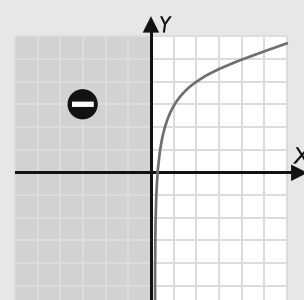
b)  $y = -3 + \log_{1/2} x$

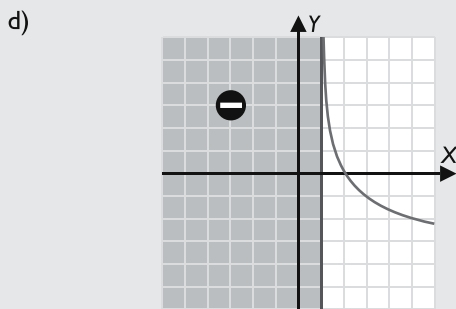
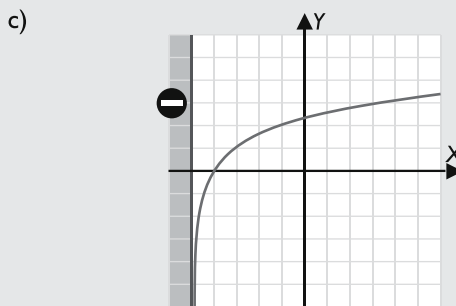
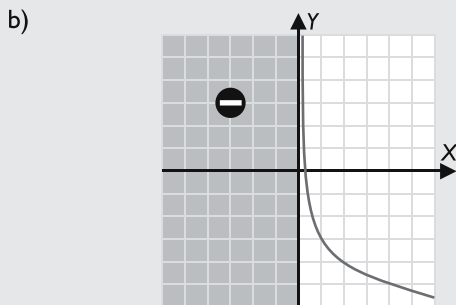
c)  $y = \log_2 (x + 5)$

d)  $y = \log_{1/2} (x - 1)$

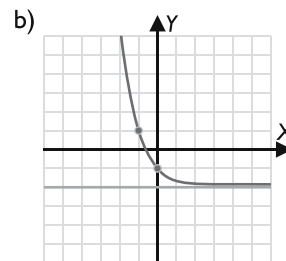
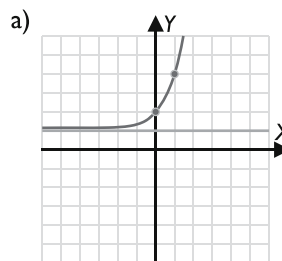
**Solución:**

a)





**33** Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

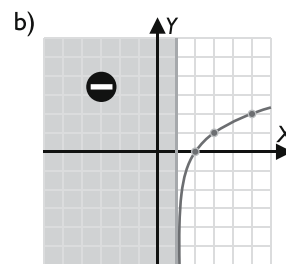
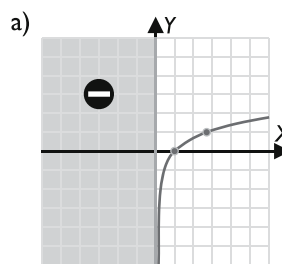


**Solución:**

a)  $y = 1 + 3^x$

b)  $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

**34** Escribe las fórmulas de las siguientes funciones:



**Solución:**

a)  $y = \ln x$

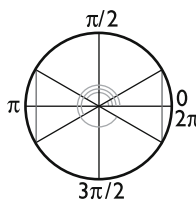
b)  $y = \log_2(x - 1)$

## 8. Funciones trigonométricas

### Piensa y calcula

Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

| $x$             | $30^\circ$ | $150^\circ$ | $210^\circ$ | $330^\circ$ |
|-----------------|------------|-------------|-------------|-------------|
| $\text{sen } x$ |            |             |             |             |
| $\text{cos } x$ |            |             |             |             |
| $\text{tg } x$  |            |             |             |             |



**Solución:**

| $x$             | $30^\circ$           | $150^\circ$           | $210^\circ$           | $330^\circ$           |
|-----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\text{sen } x$ | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{2}$         | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{1}{2}$        |
| $\text{cos } x$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  |
| $\text{tg } x$  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## Aplica la teoría

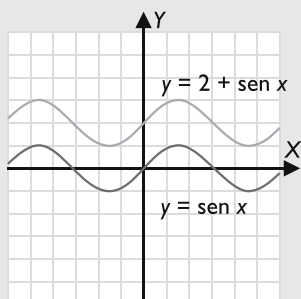
**35** Dibuja las siguientes funciones a partir de la función  $y = \operatorname{sen} x$

a)  $y = 2 + \operatorname{sen} x$

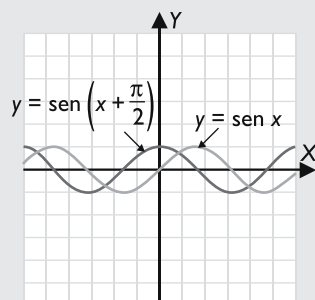
b)  $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

**Solución:**

a)



b)



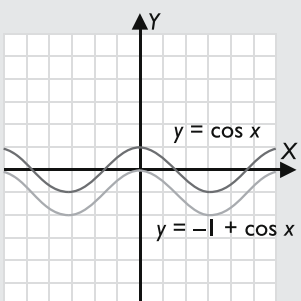
**36** Dibuja las siguientes funciones a partir de la función  $y = \cos x$

a)  $y = -1 + \cos x$

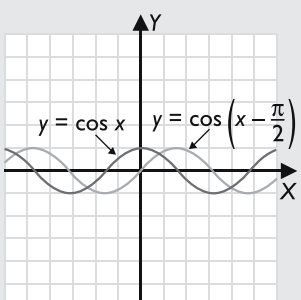
b)  $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

**Solución:**

a)



b)



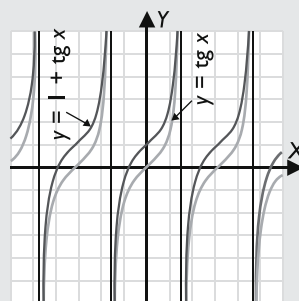
**37** Dibuja las siguientes funciones a partir de la función  $y = \operatorname{tg} x$

a)  $y = 1 + \operatorname{tg} x$

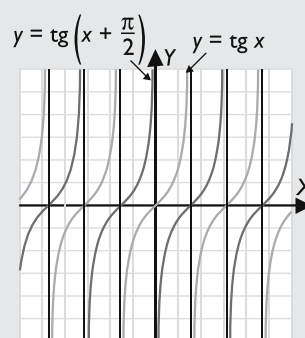
b)  $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

**Solución:**

a)



b)



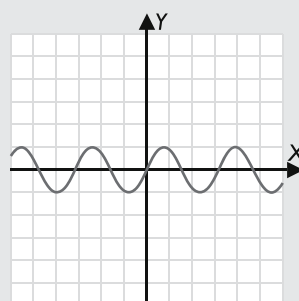
**38** Dibuja las siguientes funciones:

a)  $y = \operatorname{sen} 2x$

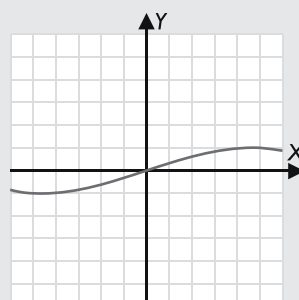
b)  $y = \operatorname{sen} \frac{x}{3}$

**Solución:**

a)



b)



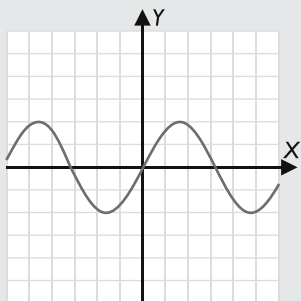
**39** Dibuja las siguientes funciones:

a)  $y = 2 \operatorname{sen} x$

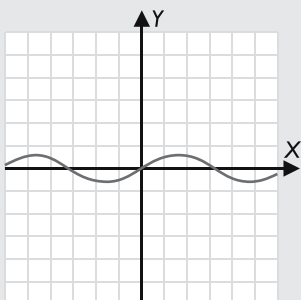
b)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

**Solución:**

a)



b)



**40** Dibuja las siguientes funciones:

a)  $y = \cos 2x$

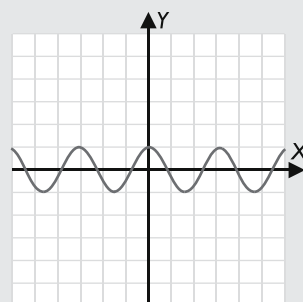
b)  $y = \cos \frac{x}{3}$

c)  $y = 2 \cos x$

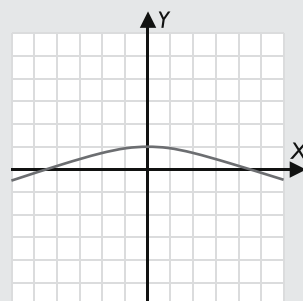
d)  $y = \frac{1}{2} \cos x$

**Solución:**

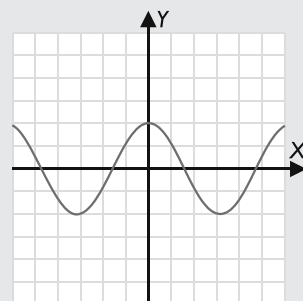
a)



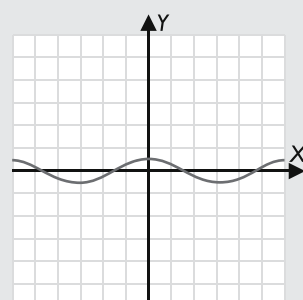
b)



c)

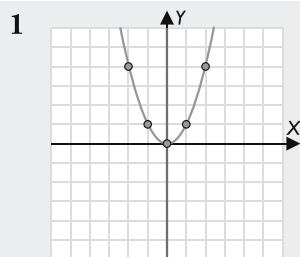


d)



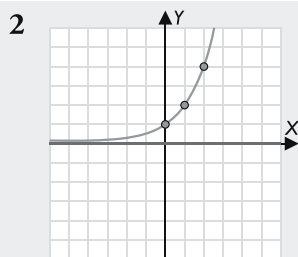
# Funciones elementales que hay que conocer

Halla el tipo de cada una de las siguientes funciones y calcula mentalmente su fórmula



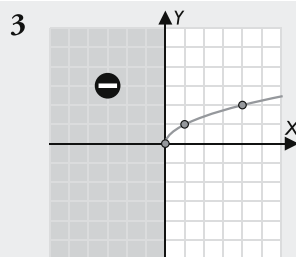
**Solución:**

Polinómica:  $y = x^2$



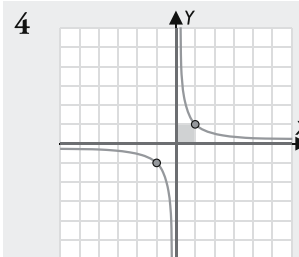
**Solución:**

Exponencial:  $y = 2^x$



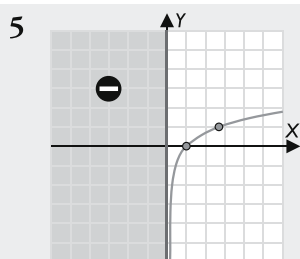
**Solución:**

Irrracional:  $y = \sqrt{x}$



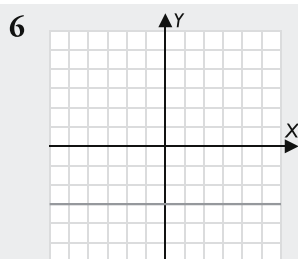
**Solución:**

Racional:  $y = \frac{1}{x}$



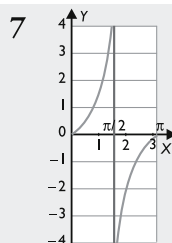
**Solución:**

Logarítmica:  $y = \ln x$



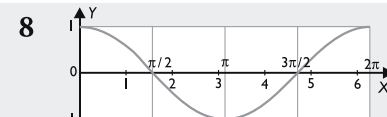
**Solución:**

Polinómica:  $y = -3$

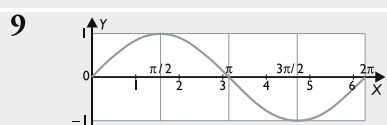


**Solución:**

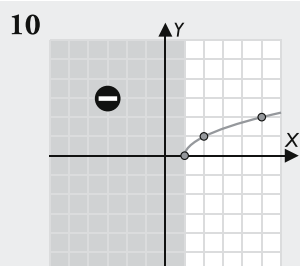
Trigonómica:  
 $y = \cos x$



**Solución:** Trigonómica:  $y = \cos x$

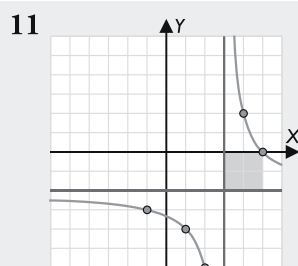


**Solución:** Trigonómica:  $y = \sin x$



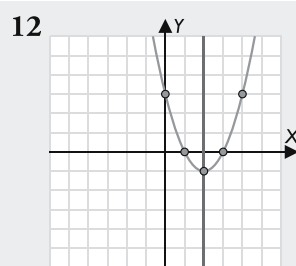
**Solución:**

Irrracional:  $y = \sqrt{x-1}$



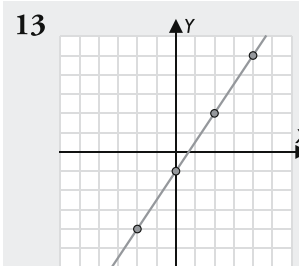
**Solución:**

Racional:  $y = \frac{4}{x-3} - 2$



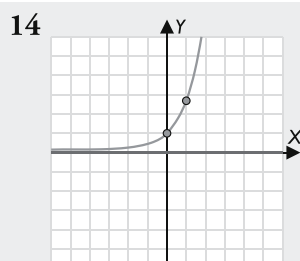
**Solución:**

Polinómica:  $y = x^2 - 4x + 3$



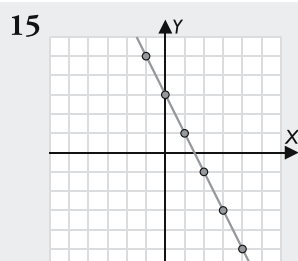
**Solución:**

Polinómica:  $y = \frac{3x}{2} - 1$



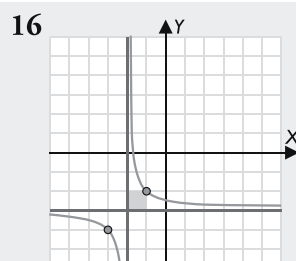
**Solución:**

Exponencial:  $y = e^x$



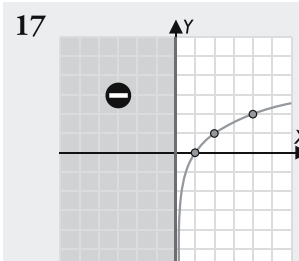
**Solución:**

Polinómica:  $y = -2x + 3$



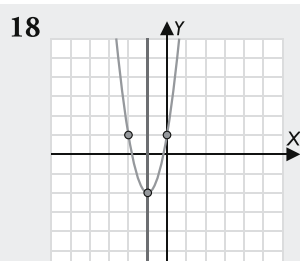
**Solución:**

Racional:  $y = \frac{1}{x+2} - 3$



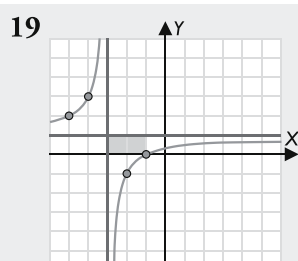
**Solución:**

Logarítmica:  $y = \log_2 x$



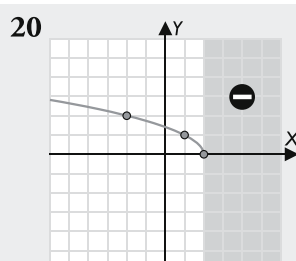
**Solución:**

Polinómica:  $y = 3x^2 + 6x + 1$



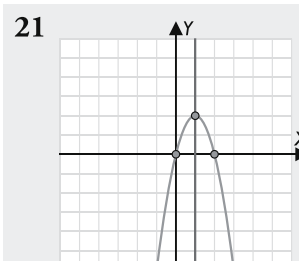
**Solución:**

Racional:  $y = -\frac{2}{x+3} + 1$



**Solución:**

Irrracional:  $y = \sqrt{2-x}$



**Solución:**

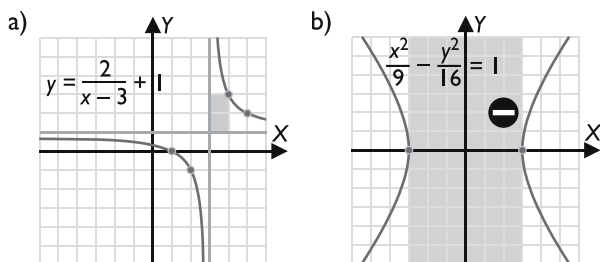
Polinómica:  $y = -2x^2 + 4x$

# Ejercicios y problemas propuestos

## Ejercicios propuestos

### 1. Estudio gráfico de una función

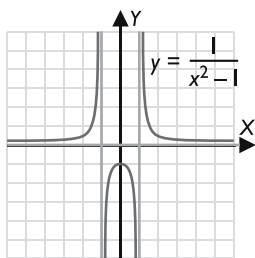
41 Indica cuál de las siguientes gráficas es función.



**Solución:**

- a) Sí es función, porque para cada valor de  $x$  existe un único valor de  $y$
- b) No es función. Por ejemplo, para  $x = 4$  existen dos valores de  $y$

42 Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



**Solución:**

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en  $x = -1$  y en  $x = 1$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje  $Y$
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = -1$ ,  $x = 1$
  - Horizontales:  $y = 0$
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:  $A(0, -1)$   
 Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-1, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(0, -1)$
 Monotonía:
  - Creciente:  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
  - Decreciente:  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión:  $O(0, 0)$

Curvatura:

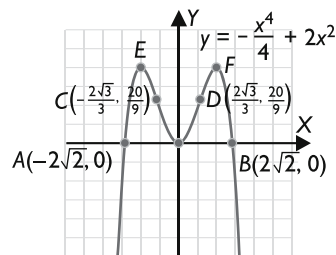
– Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

– Cóncava ( $\cap$ ):  $(-1, 1)$

10. Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

43 Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



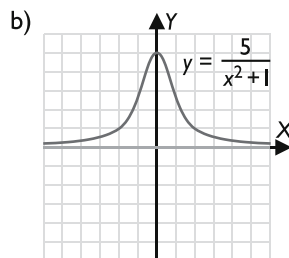
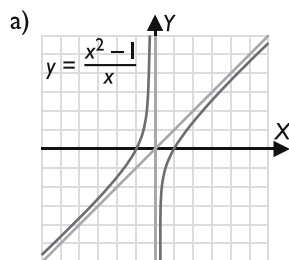
**Solución:**

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo  $\mathbb{R}$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje  $Y$
- Asíntotas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje  $X$ :  $A(-2\sqrt{2}, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B(2\sqrt{2}, 0)$
  - Eje  $Y$ :  $O(0, 0)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
  - Negativa (-):  $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - a) Máximo relativo:  $E(-2, 4)$ ,  $F(2, 4)$
  - b) Mínimo relativo:  $O(0, 0)$
 Monotonía:
  - Creciente:  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
  - Decreciente:  $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- Puntos de inflexión:  $C(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9})$ ,  $D(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9})$   
 Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$
- Recorrido o imagen:  
 $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$



## 2. Funciones reales de variable real

**44** Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:



**Solución:**

- a) Racional.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$   
 b) Racional.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

**45** Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a)  $y = x^4 - x^2 + 1$       b)  $y = \frac{2}{x+3}$   
 c)  $y = \frac{x+1}{x^2-x-6}$       d)  $y = 3 + \sqrt{x+2}$

**Solución:**

- a) Polinómica.  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$   
 b) Racional.  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$   
 c) Racional.  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$   
 d) Irracional.  
 $\text{Dom}(f) = [-2, +\infty)$

**46** Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a)  $y = 2x^3 - 7x^2 + 3x - 4$       b)  $y = \frac{3}{x^2+x}$   
 c)  $y = \frac{x}{(x-2)^2}$       d)  $y = \sqrt{4-2x}$

**Solución:**

- a) Polinómica.  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$   
 b) Racional.  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$   
 c) Racional.  
 $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$   
 d) Irracional.  
 $\text{Dom}(f) = (-\infty, 2]$

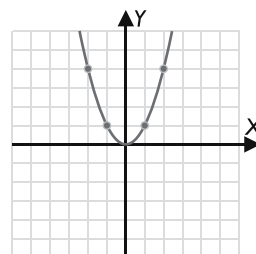
**47** Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a)  $y = 3^x$       b)  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$   
 c)  $y = \ln(x-2)$       d)  $y = \cos(x-\pi)$

**Solución:**

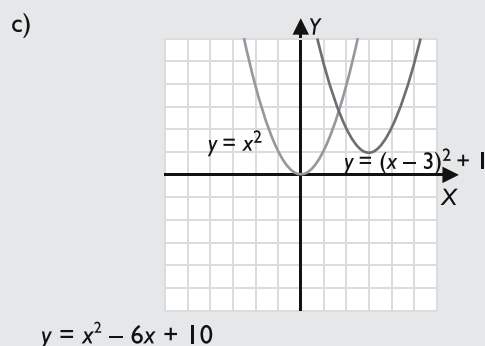
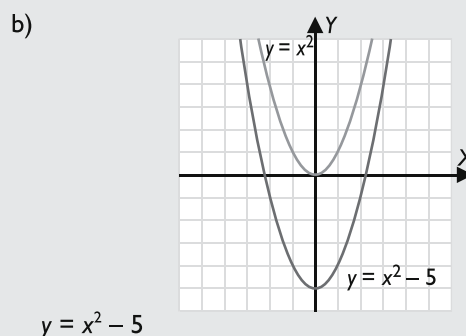
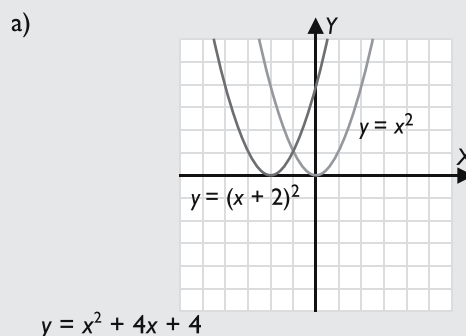
- a) Exponencial.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$   
 b) Exponencial.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$   
 c) Logarítmica.  $\text{Dom}(f) = (2, +\infty)$   
 d) Trigonométrica.  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

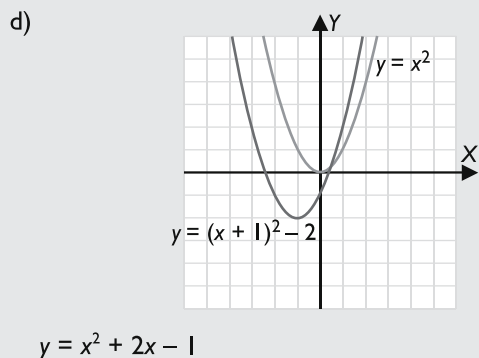
**48** A partir de la gráfica de  $y = f(x)$ , dibuja las gráficas siguientes y halla su ecuación:



a)  $y = f(x+2)$       b)  $y = f(x) - 5$   
 c)  $y = f(x-3) + 1$       d)  $y = f(x+1) - 2$

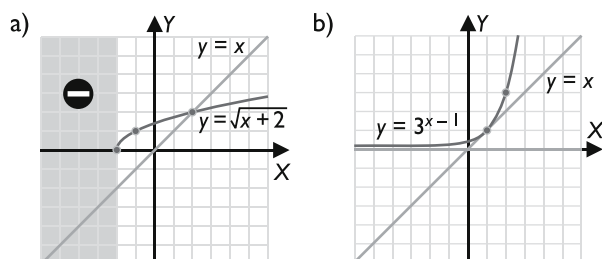
**Solución:**



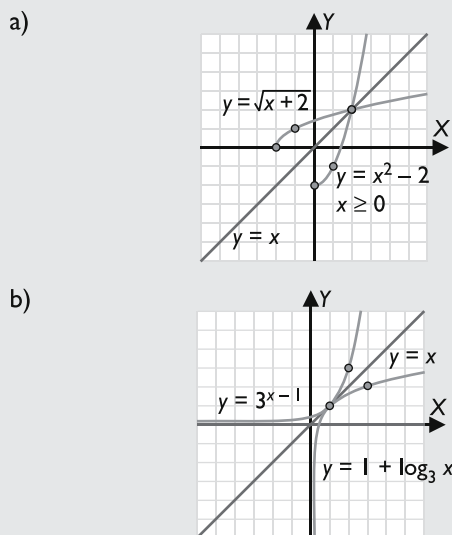


## 3. Operaciones con funciones

**49** Dibuja la función inversa de  $y = f(x)$  en cada caso y halla su fórmula.



**Solución:**



**50** Dadas las funciones  $f(x) = x^2 - 4$  y  $g(x) = \sqrt{x}$ , calcula:

a)  $g \circ f$                       b)  $f \circ g$

**Solución:**

a)  $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$       b)  $(f \circ g)(x) = x - 4$

**51** Dadas las funciones  $f(x) = \sin x$  y  $g(x) = 2x + 1$ , calcula:

a)  $g \circ f$                       b)  $f \circ g$

**Solución:**

a)  $(g \circ f)(x) = 1 + 2 \sin x$

b)  $(f \circ g)(x) = \sin(2x + 1)$

**52** Calcula la función inversa de  $y = f(x)$  en los siguientes casos:

- a)  $y = 2x + 1$
- b)  $y = -3x + 2$

**Solución:**

a)  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$

b)  $f^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$

**53** Calcula la función inversa de  $y = f(x)$  en los siguientes casos:

- a)  $y = \frac{x}{x+3}$
- b)  $y = x^2 - 4; x \geq 0$

**Solución:**

a)  $f^{-1}(x) = \frac{3x}{1-x}$

b)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$

**54** Indica si las siguientes funciones son pares, impares o ni pares ni impares, y calcula su simetría:

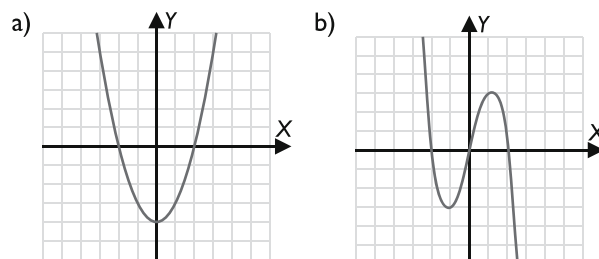
- a)  $y = x$                       b)  $y = x + 3$
- c)  $y = \frac{3}{x}$                       d)  $y = x^2 + 2$

**Solución:**

- a) Es impar  $\Rightarrow$  Simétrica respecto del origen de coordenadas  $O(0, 0)$
- b) No es par, ni impar.
- c) Es impar  $\Rightarrow$  Simétrica respecto del origen de coordenadas  $O(0, 0)$
- d) Es par  $\Rightarrow$  Simétrica respecto del eje  $Y$

## 4. Funciones polinómicas

**55** Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?



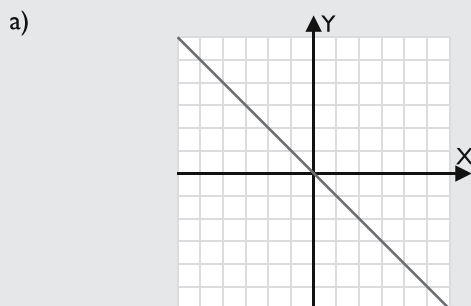
**Solución:**

- a) De 2.º grado. El coeficiente principal es positivo.
- b) De 3.º grado. El coeficiente principal es negativo.

**56** Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen.

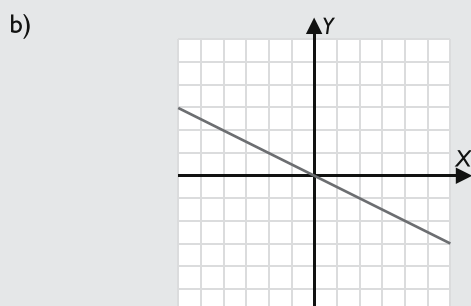
- a)  $y = -x$                       b)  $y = -\frac{x}{2}$   
 c)  $y = \frac{3x}{2} + 1$                 d)  $y = -2x - 1$

**Solución:**



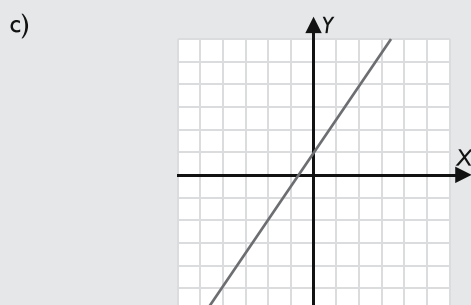
$$m = -1$$

Ordenada en el origen: 0



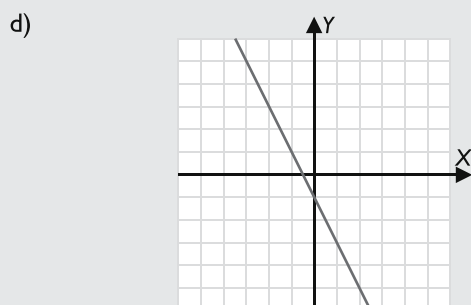
$$m = -\frac{1}{2}$$

Ordenada en el origen: 0



$$m = \frac{3}{2}$$

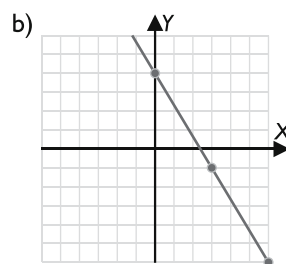
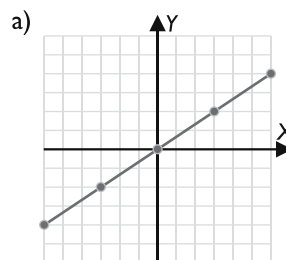
Ordenada en el origen: 1



$$m = -2$$

Ordenada en el origen: -1

**57** Escribe las fórmulas de las siguientes rectas:



**Solución:**

a)  $y = \frac{2x}{3}$

b)  $y = -\frac{5x}{3} + 4$

**58** En un mercado de bicicletas de paseo las funciones de oferta y demanda son respectivamente:

$$O(x) = 34x - 100 \text{ y } D(x) = 20000 - 100x$$

- a) Encuentra la cantidad de equilibrio.  
 b) ¿A qué precio escasearán 6700 bicicletas?  
 c) A un precio de 175 €, ¿qué ocurrirá en el mercado?

**Solución:**

a)  $O(x) = D(x) \Rightarrow 34x - 100 = 20000 - 100x \Rightarrow x = 150$

Para un precio de 150 € la oferta es  $O(150) = 5000$

La cantidad de equilibrio será de 5000 bicicletas a 150 €

b)  $O(x) = D(x) - 6700$

$$34x - 100 = 20000 - 100x - 6700 \Rightarrow x = 100$$

Se producirá esa escasez cuando el precio sea de 100 €

c) Si  $x = 175$  € se tiene  $O(175) = 5850$  y  $D(175) = 2500$

Hay exceso de oferta.

## 5. Funciones cuadráticas

**59** Representa la parábola  $y = 2x^2$ ; a partir de ella, las siguientes:

a)  $y = 2(x - 1)^2$

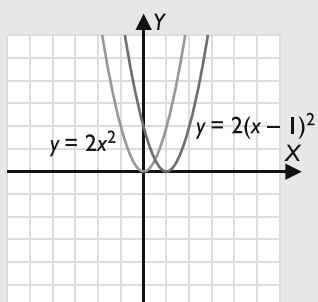
b)  $y = 2x^2 - 3$

c)  $y = 2(x + 2)^2$

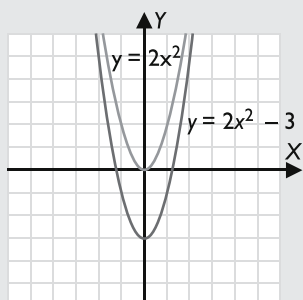
d)  $y = 2(x + 1)^2 + 2$

**Solución:**

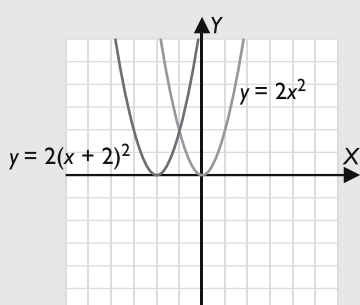
a)



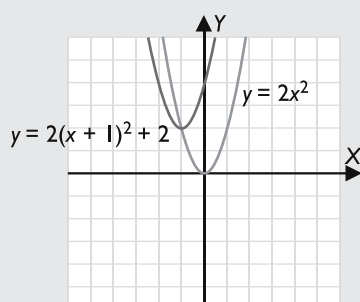
b)



c)



d)



**60** Representa las siguientes parábolas:

a)  $y = x^2 - 4x + 2$

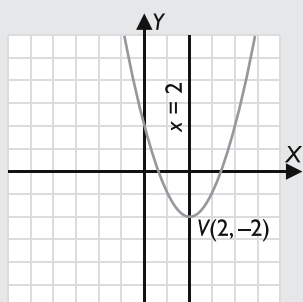
b)  $y = -x^2 - 2x + 1$

c)  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$

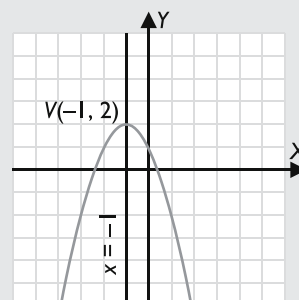
d)  $y = -2x^2 + 4x + 3$

**Solución:**

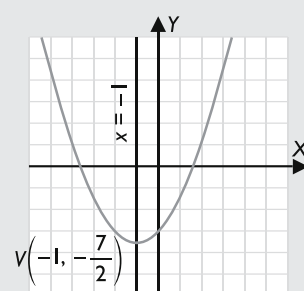
a)



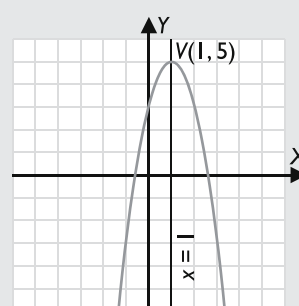
b)



c)

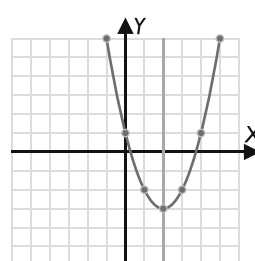


d)

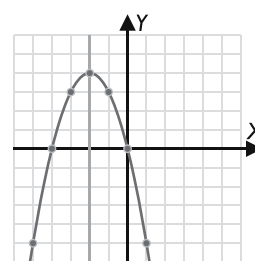


**61** Escribe las fórmulas de las siguientes parábolas:

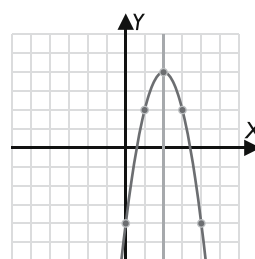
a)



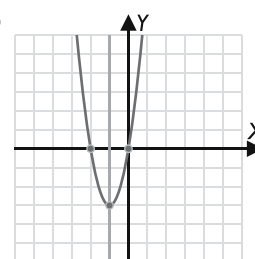
b)



c)



d)



**Solución:**

a)  $y = x^2 - 4x + 1$

b)  $y = -x^2 - 4x$

c)  $y = -2x^2 + 8x - 4$

d)  $y = 3x^2 + 6x$

## 6. Funciones racionales e irracionales

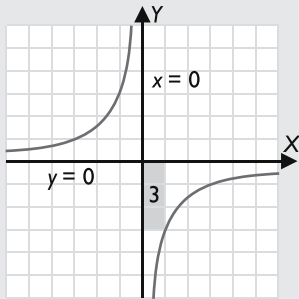
**62** Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante  $k$ , de proporcionalidad inversa.

a)  $y = -\frac{3}{x}$

b)  $y = \frac{2}{x}$

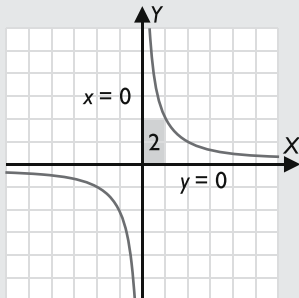
**Solución:**

a)



$k = -3$

b)



$k = 2$

**63** Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante  $k$

a)  $y = \frac{2x+2}{x}$

b)  $y = \frac{3x+7}{x+2}$

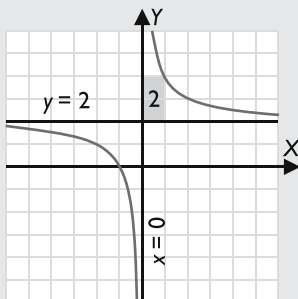
c)  $y = \frac{-2x-6}{x+1}$

d)  $y = \frac{-2x+3}{x}$

**Solución:**

a)

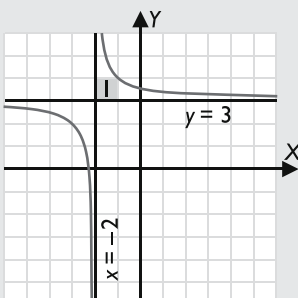
$y = \frac{2}{x} + 2$



$k = 2$

b)

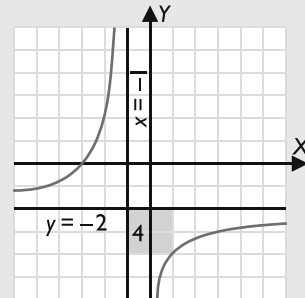
$y = \frac{1}{x+2} + 3$



$k = 1$

c)

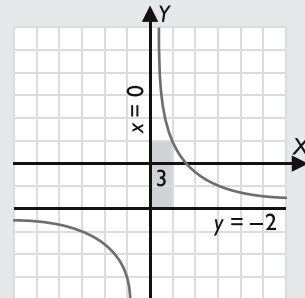
$y = \frac{-4}{x+1} - 2$



$k = -4$

d)

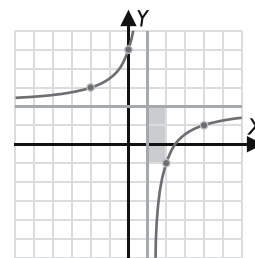
$y = \frac{3}{x} - 2$



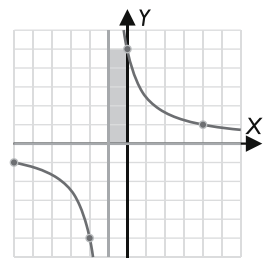
$k = 3$

**64** Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



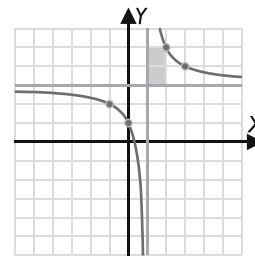
**Solución:**

a)  $y = -\frac{3}{x-1} + 2$

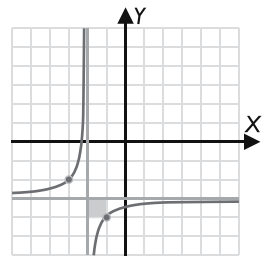
b)  $y = \frac{5}{x+1}$

**65** Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



**Solución:**

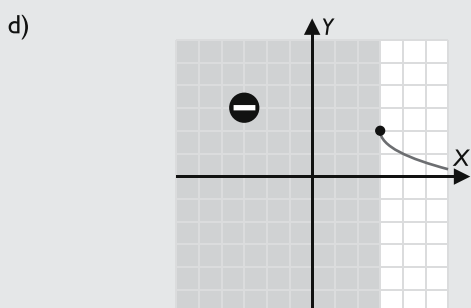
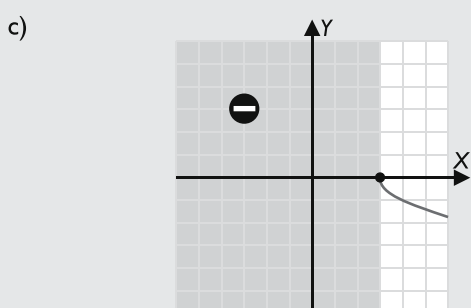
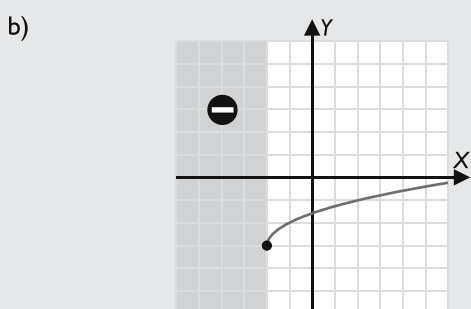
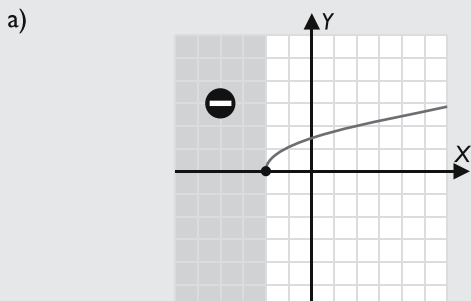
a)  $y = \frac{2}{x-1} + 3$

b)  $y = -\frac{1}{x+2} - 3$

**66** Dibuja las siguientes funciones irracionales:

- a)  $y = \sqrt{x+2}$       b)  $y = -3 + \sqrt{x+2}$   
 c)  $y = -\sqrt{x-3}$       d)  $y = 2 - \sqrt{x-3}$

**Solución:**



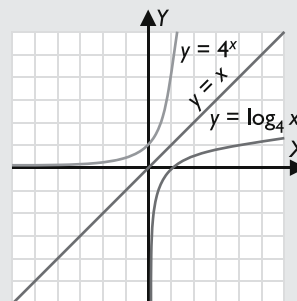
## 7. Funciones exponenciales y logarítmicas

**67** Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a)  $y = 4^x$       b)  $y = \log_4 x$   
 ¿Respecto a qué recta son simétricas?

**Solución:**

Son simétricas respecto de la bisectriz del 1.º y 3.º cuadrantes;  $y = x$ ; por tanto, una es inversa de la otra.



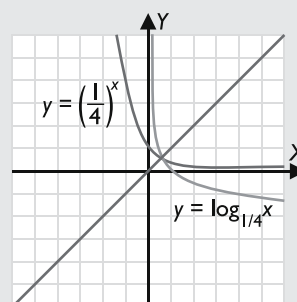
**68** Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a)  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$   
 b)  $y = \log_{1/4} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

**Solución:**

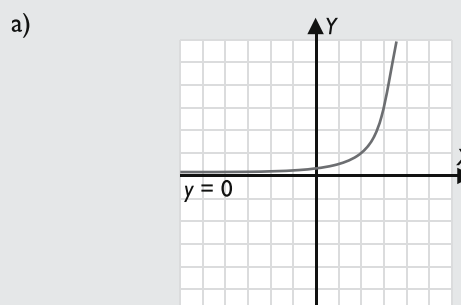
Son simétricas respecto de la bisectriz del 1.º y 3.º cuadrantes;  $y = x$ , por tanto, una es inversa de la otra.

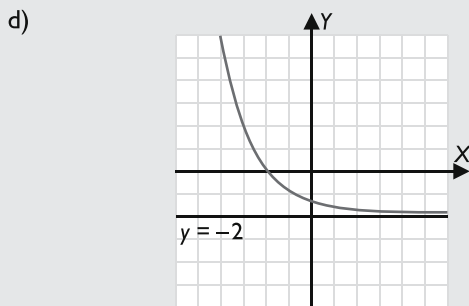
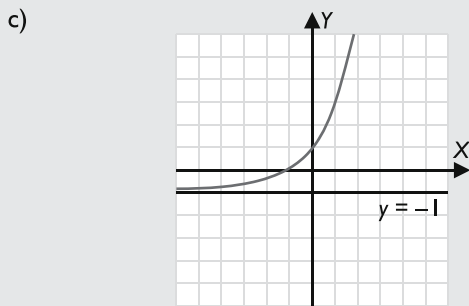
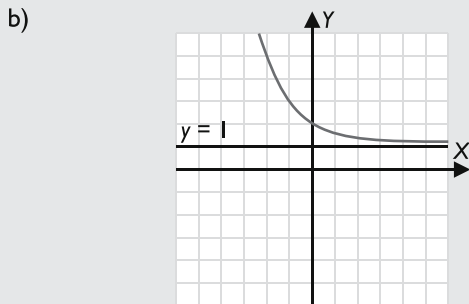


**69** Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a)  $y = 3^{x-2}$   
 b)  $y = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$   
 c)  $y = -1 + 2^{x+1}$   
 d)  $y = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

**Solución:**

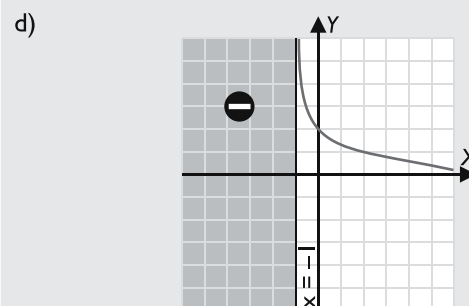
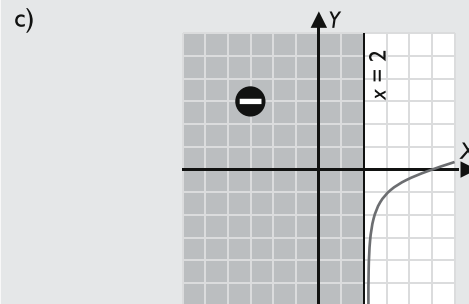
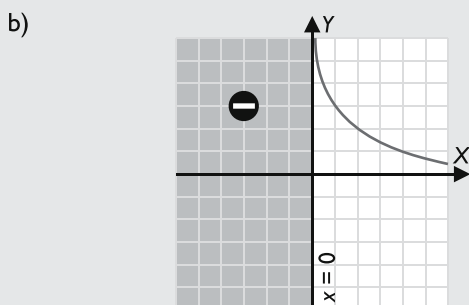
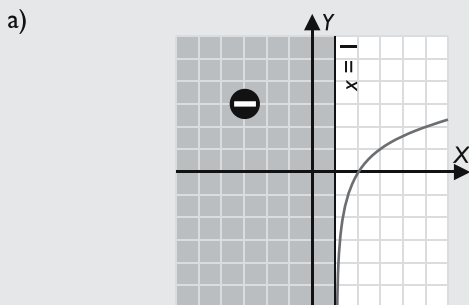




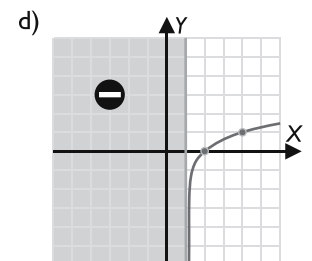
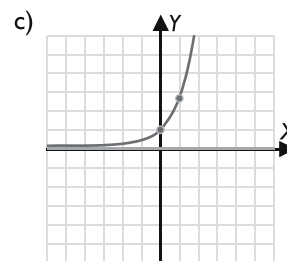
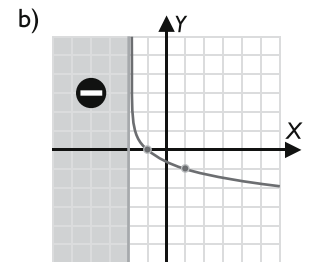
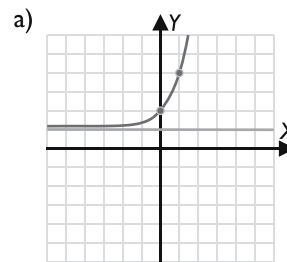
**70** Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

- a)  $y = \log_2 (x - 1)$       b)  $y = 3 + \log_{1/2} x$   
 c)  $y = -1 + \log_3 (x - 2)$       d)  $y = 2 + \log_{1/3} (x + 1)$

**Solución:**



**71** Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:



**Solución:**

- a)  $y = 1 + 3^x$   
 b)  $y = \log_{1/3} (x + 2)$   
 c)  $y = e^x$   
 d)  $y = \log_3 (x - 1)$

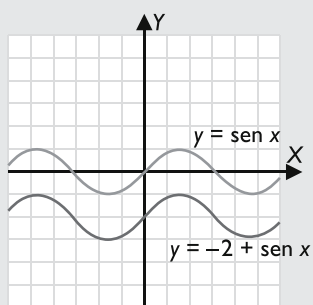
## 8. Funciones trigonométricas

**72** Dibuja las siguientes funciones a partir de la función  $y = \sin x$

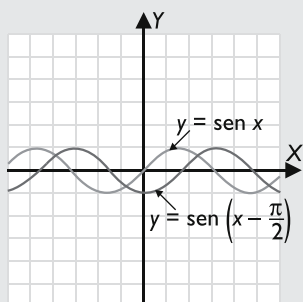
- a)  $y = -2 + \sin x$   
 b)  $y = \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$

**Solución:**

a)



b)



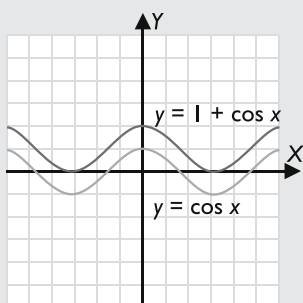
**73** Dibuja las siguientes funciones a partir de la función  $y = \cos x$

a)  $y = 1 + \cos x$

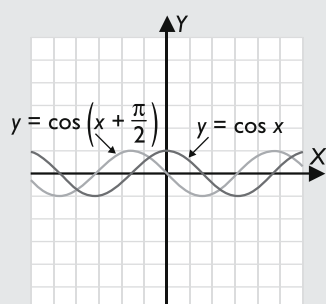
b)  $y = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$

**Solución:**

a)



b)



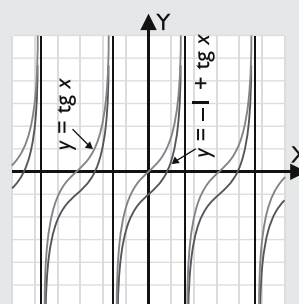
**74** Dibuja las siguientes funciones a partir de la función  $y = \text{tg } x$

a)  $y = -1 + \text{tg } x$

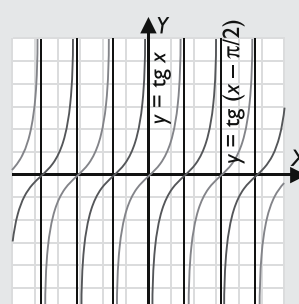
b)  $y = \text{tg} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$

**Solución:**

a)



b)



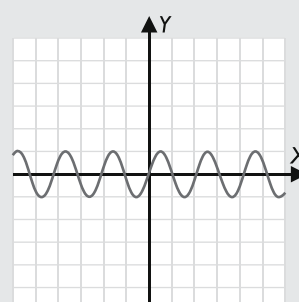
**75** Dibuja las siguientes funciones:

a)  $y = \text{sen } 3x$

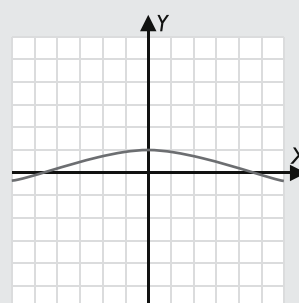
b)  $y = \cos \frac{x}{3}$

**Solución:**

a)



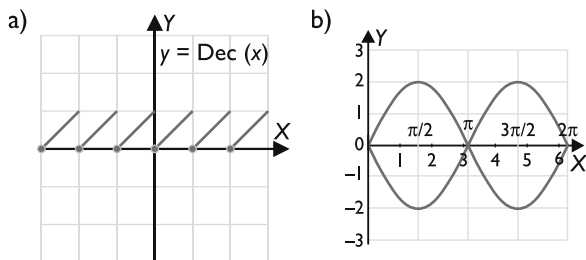
b)





## Para ampliar

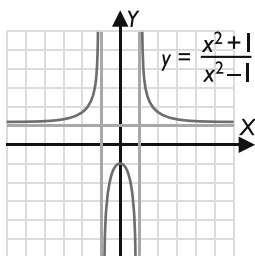
**76** Indica cuál de las siguientes gráficas es función:



**Solución:**

- a) Es función:  $y = \text{Dec}(x)$   
 b) No es función.

**77** Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



**Solución:**

- Tipo de función: racional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en  $x = -1$  y en  $x = 1$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
  - Verticales:  $x = -1, x = 1$
  - Horizontales:  $y = 1$
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X: no corta.
  - Eje Y:  $A(0, -1)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
  - Negativa (-):  $(-1, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo:  $A(0, -1)$
  - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
  - Creciente:  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
  - Decreciente:  $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

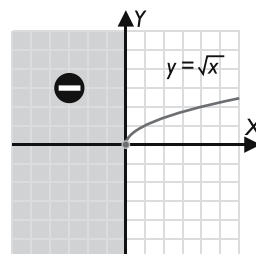
Curvatura:

- Convexa ( $\cup$ ):  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava ( $\cap$ ):  $(-1, 1)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$$

**78** Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



**Solución:**

- Tipo de función: irracional.
- Dominio:  $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$
- Continuidad: es continua en  $[0, +\infty)$
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica.
- Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
  - Eje X:  $O(0, 0)$
  - Eje Y:  $O(0, 0)$
 Signo:
  - Positiva (+):  $(0, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
  - Creciente:  $(0, +\infty)$
  - Decreciente:  $\emptyset$
- Puntos de inflexión: no tiene.
- Curvatura:
  - Convexa ( $\cup$ ):  $\emptyset$
  - Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, +\infty)$
- Recorrido o imagen:
 
$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$

# Ejercicios y problemas propuestos

**79** Halla el dominio de las siguientes funciones:

a)  $y = \frac{2}{\sqrt{x-5}}$

b)  $y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

**Solución:**

a)  $\text{Dom}(f) = (5, +\infty)$

b)  $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

**80** Halla el dominio de las siguientes funciones:

a)  $y = \ln \frac{x+2}{x-3}$

b)  $y = \ln \sqrt{x}$

c)  $y = \sin \frac{2}{x}$

d)  $y = e^{\sqrt{x}}$

**Solución:**

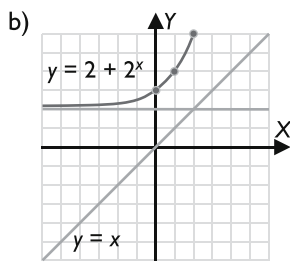
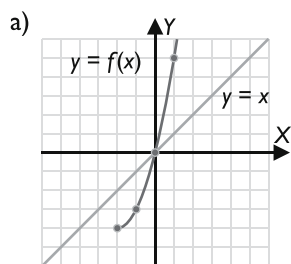
a)  $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

b)  $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

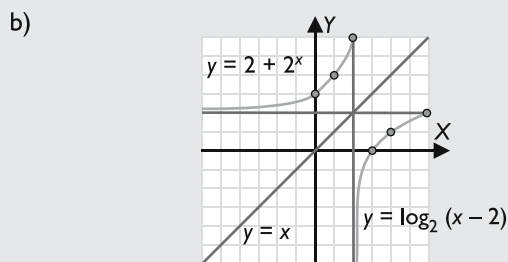
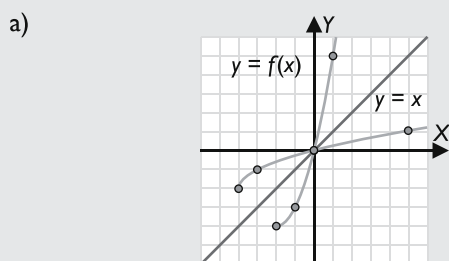
c)  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

d)  $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

**81** Dibuja la función inversa de  $y = f(x)$  en cada caso:



**Solución:**



**82** Dadas las funciones  $f(x) = \text{tg } x$  y  $g(x) = \frac{1}{x}$ , calcula:

a)  $g \circ f$

b)  $f \circ g$

c)  $f \circ f$

d)  $g \circ g$

**Solución:**

a)  $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\text{tg } x}$

b)  $(f \circ g)(x) = \text{tg } \frac{1}{x}$

c)  $(f \circ f)(x) = \text{tg}(\text{tg } x)$

d)  $(g \circ g)(x) = x$

**83** Calcula la función inversa de la función  $y = f(x)$  en los siguientes casos:

a)  $y = \sqrt{x+2}$

b)  $y = x^2 - 5$

c)  $y = \frac{x}{x-3}$

d)  $y = \frac{x-2}{x-1}$

**Solución:**

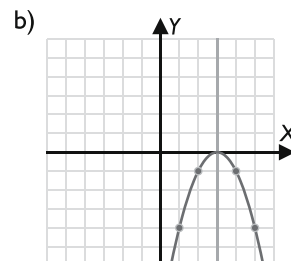
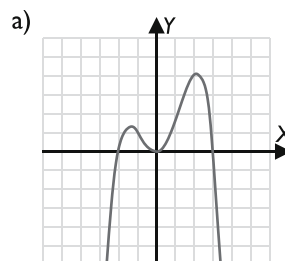
a)  $y = x^2 - 2$  si  $x \geq 0$

b)  $y = \sqrt{x+5}$

c)  $y = \frac{3x}{x-1}$

d)  $y = \frac{x-2}{x-1}$

**84** Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?



**Solución:**

a) Es de grado cuatro.

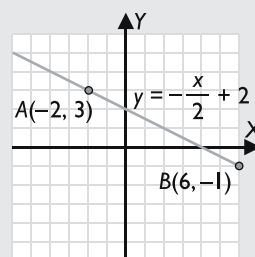
El coeficiente principal es negativo.

b) Es de grado dos.

El coeficiente principal es negativo.

**85** Dibuja la recta que pasa por los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(6, -1)$ , y halla su fórmula.

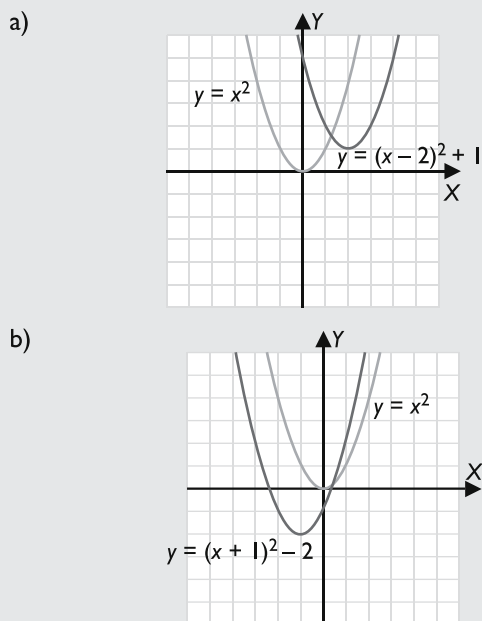
**Solución:**



**86** Representa la parábola  $f(x) = x^2$ ; a partir de ella, las siguientes funciones:

- a)  $f(x-2) + 1$   
b)  $f(x+1) - 2$

**Solución:**



**87** Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

- a)  $A(0, -1)$ ,  $B(2, -5)$  y  $C(5, 4)$   
b)  $A(3, 4)$ ,  $B(4, 2)$  y  $C(1, -4)$

**Solución:**

- a)  $y = x^2 - 4x - 1$   
b)  $y = -2x^2 + 12x - 14$

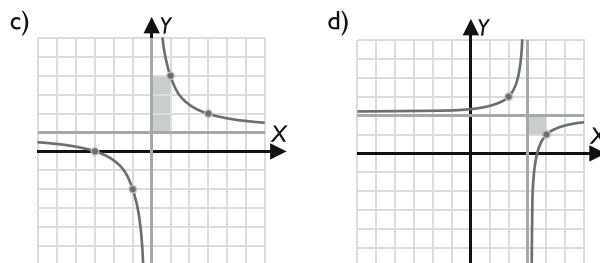
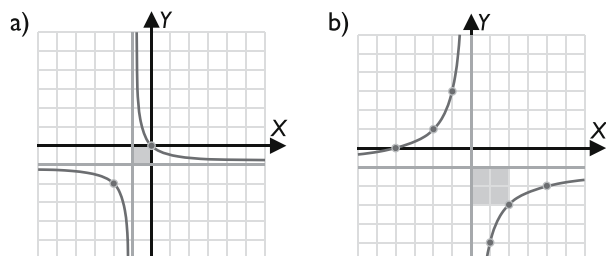
**88** Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

- a)  $A(2, 0)$ ,  $B(3, 1)$  y  $C(4, 4)$   
b)  $A(-1, 2)$ ,  $B(-3, -2)$  y  $C(-5, 2)$

**Solución:**

- a)  $y = x^2 - 4x + 4$   
b)  $y = x^2 + 6x + 7$

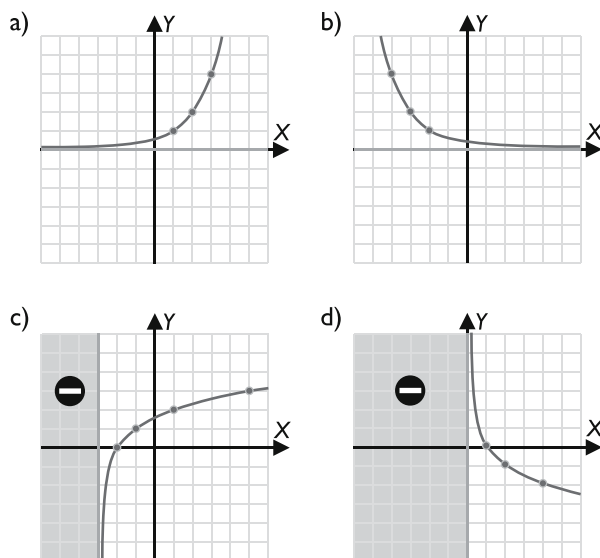
**89** Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:



**Solución:**

- a)  $y = \frac{1}{x+1} - 1$   
b)  $y = -\frac{4}{x} - 1$   
c)  $y = \frac{3}{x} + 1$   
d)  $y = -\frac{1}{x-3} + 2$

**90** Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:



**Solución:**

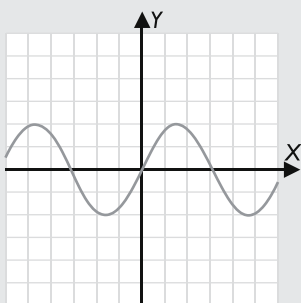
- a)  $y = 2^{x-1}$   
b)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$   
c)  $y = \log_2(x+3)$   
d)  $y = \log_{1/2} x$

**91** Dibuja las siguientes funciones:

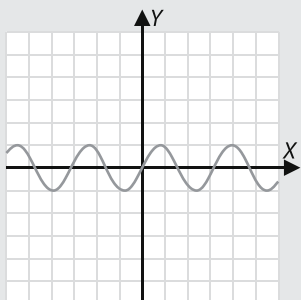
- a)  $y = 2 \sin x$   
b)  $y = \sin 2x$   
c)  $y = \frac{1}{2} \sin x$   
d)  $y = \sin \frac{x}{2}$

**Solución:**

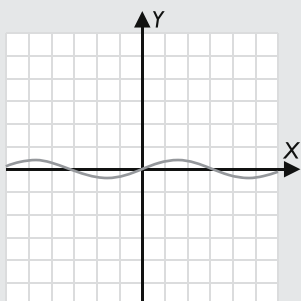
a)



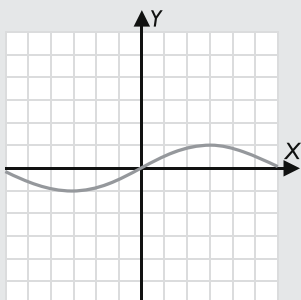
b)



c)



d)



**92** Dibuja las siguientes funciones:

a)  $y = 3 \cos x$

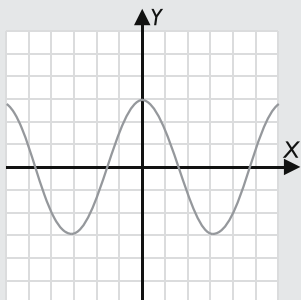
b)  $y = \cos 3x$

c)  $y = \frac{1}{3} \cos x$

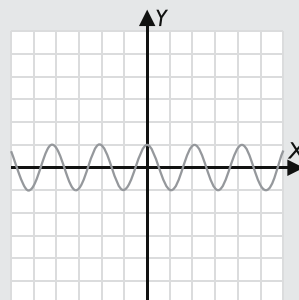
d)  $y = \cos \frac{x}{3}$

**Solución:**

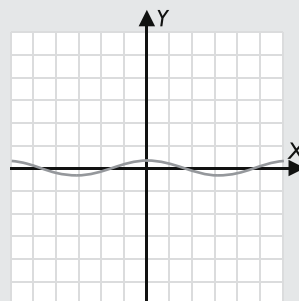
a)



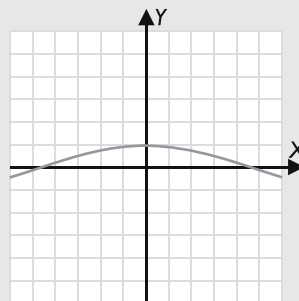
b)



c)



d)



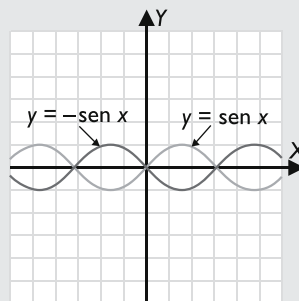
**93** Dibuja las siguientes funciones a partir de  $y = \sin x$

a)  $y = -\sin x$

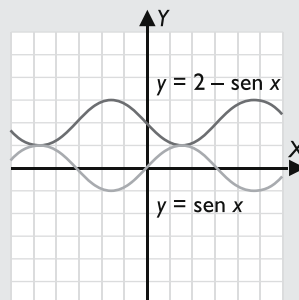
b)  $y = 2 - \sin x$

**Solución:**

a)



b)



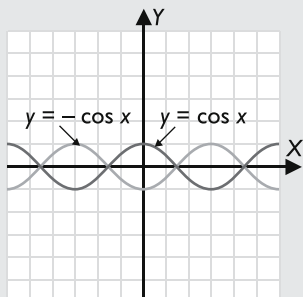
**94** Dibuja las siguientes funciones a partir de  $y = \cos x$

a)  $y = -\cos x$

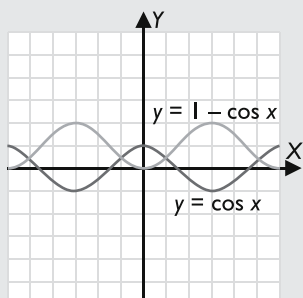
b)  $y = 1 - \cos x$

**Solución:**

a)



b)



**95** Dibuja las siguientes funciones:

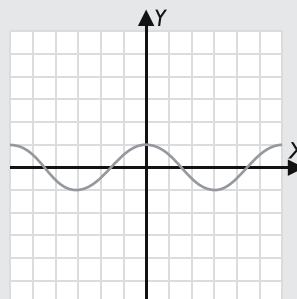
a)  $y = \cos x$

b)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

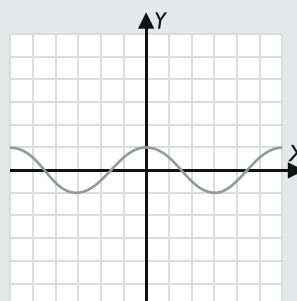
¿Qué observas?

**Solución:**

a)



b)

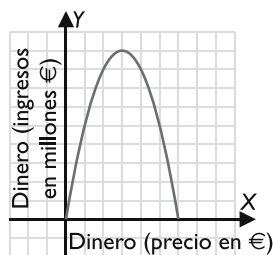


Se observa que son la misma gráfica, luego:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

## Problemas propuestos

**96** En la gráfica adjunta se representan los ingresos en función del precio de cada cuaderno que fabrica una empresa y que se vende. Describe las características de la gráfica.



**Solución:**

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio:  $\text{Dom}(f) = [0, 6]$
3. Continuidad: es continua en su dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: simétrica respecto a  $x = 3$
6. Asíntotas:
  - Verticales: no tiene.
  - Horizontales: no tiene.
  - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

– Eje X:  $O(0, 0)$  y  $A(6, 0)$

– Eje Y:  $O(0, 0)$

Signo:

– Positiva (+):  $A(0, 6)$

8. Máximos y mínimos relativos:

a) Máximo relativo:  $B(3, 9)$

Para 3 € se alcanzan unos ingresos de 9 millones.

b) Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

– Creciente:  $(0, 3)$

– Decreciente:  $(3, 6)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

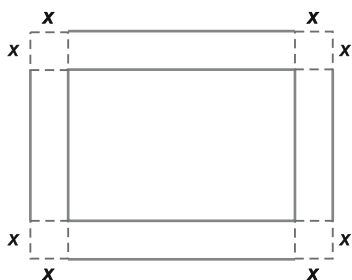
Curvatura:

– Cóncava ( $\cap$ ):  $(0, 6)$

10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, 9]$$

- 97** En un cartón rectangular de 8 cm de largo por 6 cm de ancho, se cortan, en los vértices, cuatro cuadrados de  $x$  cm de lado para construir una caja. Escribe la función que da el volumen de dicha caja en función de la longitud  $x$  y calcula su dominio de definición.



**Solución:**

$$V(x) = (8 - 2x)(6 - 2x)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 28x^2 + 48x$$

$$\text{Dom}(V) = [0, 3]$$

- 98** El perímetro de un rectángulo mide 10 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado  $x$  de la base. Calcula el dominio de definición de la función.

**Solución:**

$$A(x) = x(5 - x)$$

$$A(x) = 5x - x^2$$

$$\text{Dom}(A) = [0, 5]$$

- 99** El precio de venta al público de una revista en función del número, en miles, de ejemplares editados,  $x$ , es

$$p(x) = 4 - \frac{x}{2}$$

Escribe la función de los ingresos que se obtienen, dependiendo de los ejemplares editados, y calcula el dominio de definición.

**Solución:**

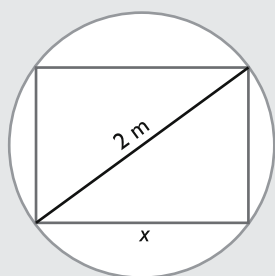
$$I(x) = x \cdot p(x) = x\left(4 - \frac{x}{2}\right)$$

$$I(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Dom}(I) = [0, 8]$$

- 100** Escribe una función que exprese el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de un metro de radio en función del lado  $x$  de la base. ¿Cuál es su dominio de definición?

**Solución:**



$$A(x) = x\sqrt{4 - x^2}$$

$$\text{Dom}(A) = [0, 2]$$

- 101** Dado un triángulo equilátero de lado  $x$ , define las funciones del perímetro y el área, en función del lado. Calcula sus dominios de definición.

**Solución:**

$$P(x) = 3x$$

$$\text{Dom}(P) = [0, +\infty)$$

$$A(x) = x \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} x^2$$

$$\text{Dom}(A) = [0, +\infty)$$

- 102** Halla la función que da la longitud del lado de un cuadrado en función del área y calcula su dominio.

**Solución:**

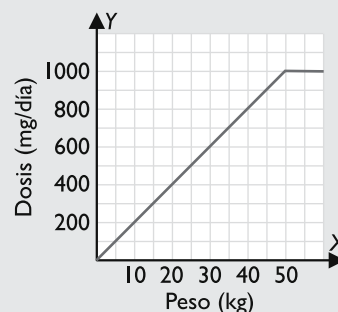
$$L(x) = \sqrt{x}$$

$$\text{Dom}(L) = [0, +\infty)$$

- 103** La dosis habitual recomendada de un determinado antibiótico para niños es de 20 mg por kilogramo de peso al día, sin sobrepasar los 1 000 mg al día. Escribe la función que da la cantidad de antibiótico que se debe suministrar en función del peso. Representa la gráfica.

**Solución:**

$$D(x) = \begin{cases} 20x & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ 1000 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$



- 104** Un emprendedor ha montado un servicio de venta por Internet y servicio a domicilio de cestas de 5 kg de frutas ecológicas teniendo en cuenta que la función de oferta y demanda estudiadas son, respectivamente:

$$O(x) = 250 + 25x; D(x) = 2750 - 75x$$

- Encuentra la cantidad de equilibrio.
- ¿A qué precio se producirá una escasez de 1 000 cestas?
- A un precio de 30 €, ¿qué ocurrirá en el mercado?

**Solución:**

$$\text{a) } O(x) = D(x) \Rightarrow 250 + 25x = 2750 - 75x \Rightarrow x = 25$$

Para un precio de 25 € la oferta es  $O(25) = 875$

La cantidad de equilibrio será de 875 cestas a 25 €

$$\text{b) } O(x) = D(x) - 1000$$

$$250 + 25x = 2750 - 75x - 1000 \Rightarrow x = 15$$

Se producirá esa escasez cuando el precio sea de 15 €

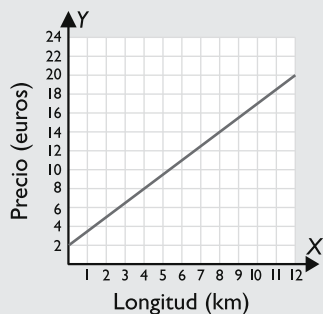
$$\text{c) Si } x = 30 \text{ € se tiene } O(30) = 1000 \text{ y } D(30) = 500$$

Hay exceso de oferta.

**105** Un taxi cobra 2 € por bajada de bandera y 1,5 € por cada kilómetro recorrido. Escribe la fórmula de la función que da el precio de una carrera, en función de la distancia recorrida, y representa su gráfica.

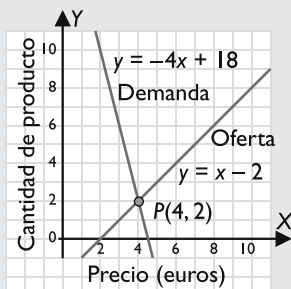
**Solución:**

$$D(x) = 2 + 1,5x$$



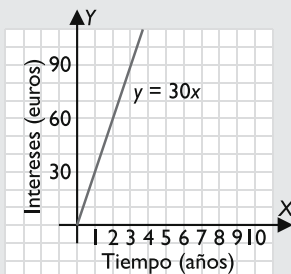
**106** Una empresa ha realizado un estudio para determinar las funciones de oferta y de demanda de un producto en función del precio de venta,  $x$ . La función de oferta es  $y = x - 2$ , y la de demanda es  $y = -4x + 18$ . Representa dichas funciones y halla el punto de equilibrio.

**Solución:**



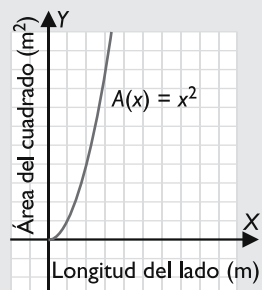
**107** Se depositan 1 000 € a un 3 % de interés simple durante un año. Escribe la fórmula que da los intereses en función del tiempo.

**Solución:**



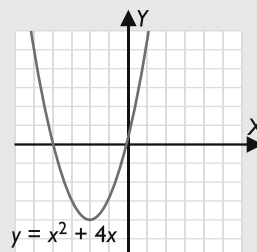
**108** Halla el área de un cuadrado en función del lado. Representa la gráfica.

**Solución:**



**109** Expresa la fórmula que da el producto de dos números que se diferencian en 4 unidades. Representa su gráfica.

**Solución:**



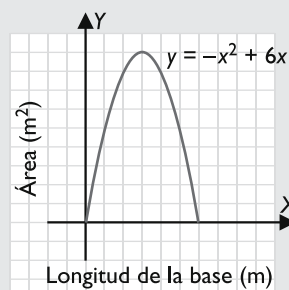
**110** Con 12 metros de moldura se desea decorar una puerta formando un rectángulo.

- Escribe la fórmula que expresa el área de dicho rectángulo en función del lado  $x$
- Representa la función.
- Determina las dimensiones del rectángulo que hacen el área máxima.

**Solución:**

a)  $A(x) = x(6 - x) \Rightarrow A(x) = 6x - x^2$

b)



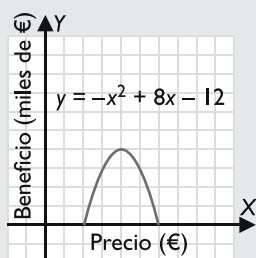
c) Un cuadrado de 3 m de lado con un área de 9 m<sup>2</sup>

**111** El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a  $x \in$  una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula  $B(x) = -x^2 + 8x - 12$

- Representa la función  $B(x)$
- Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

**Solución:**

a)



b) 4 €

**112** Una máquina envasa un pedido de botes de mermelada en 8 horas. Se ponen varias máquinas idénticas a trabajar.

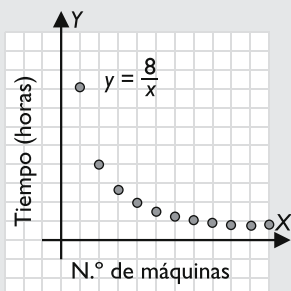
- Halla la función que expresa el tiempo de envasado en función del número de máquinas.
- Identifica la función obtenida.
- Representa gráficamente dicha función.

**Solución:**

a)  $y = \frac{8}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



**113** Para recoger los higos de una finca, una persona dedica 60 horas.

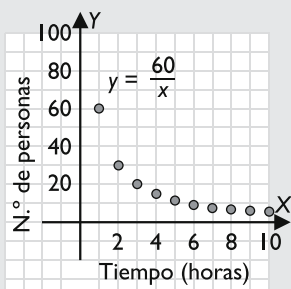
- Halla la función que expresa el número de personas en función del número de horas.
- Identifica la función obtenida.
- Representa gráficamente dicha función.

**Solución:**

a)  $y = \frac{60}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



**114** Un cultivo de bacterias se reproduce de forma que el número de bacterias se duplica cada minuto. Expresa la función que representa el número de bacterias en función del tiempo.

**Solución:**

Suponiendo que inicialmente haya una bacteria y siendo  $x$  el tiempo en minutos:  $y = 2^x$

**115** Se deposita un capital de 6 000 € al 10% anual, de manera que los intereses se acumulan al capital. Expresa la función que da el capital acumulado en función del tiempo.

**Solución:**

$$C = 6\,000 \cdot 1,1^t$$

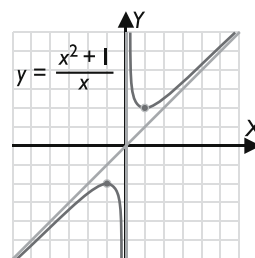
## Para profundizar

**116** Dadas las funciones  $f(x) = \cos x$  y  $g(x) = x^2$  calcula  $f \circ g \circ f$

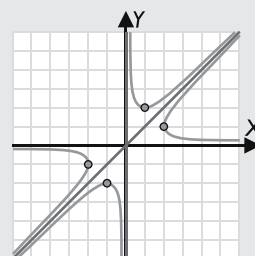
**Solución:**

$$(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)(\cos x) = f(\cos^2 x) = \cos(\cos^2 x)$$

**117** Dada la gráfica de la función  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ , dibuja la inversa.



**Solución:**



No es función.

**118** ¿Puede tener una función polinómica de cuarto grado solo un mínimo? Pon un ejemplo.

**Solución:**

Sí, la función potencial:  $y = x^4$

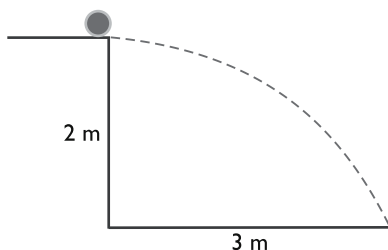
**119** ¿Puede existir una función polinómica de tercer grado que no tenga ni máximo ni mínimo? Pon un ejemplo.

**Solución:**

Sí, la función potencial:  $y = x^3$



- 120** Una pelota rueda desde una altura de 2 m y cae al suelo a 3 m de distancia. Calcula la fórmula de la curva que sigue al caer.



**Solución:**

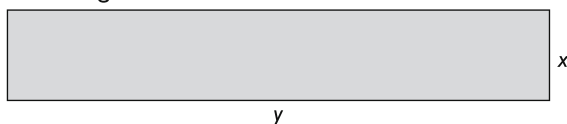
$$y = ax^2 + 2$$

Pasa por el punto  $P(3, 0)$

$$9a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{9}$$

$$y = -\frac{2x^2}{9} + 2$$

- 121** Un rectángulo tiene 6 m<sup>2</sup> de área.



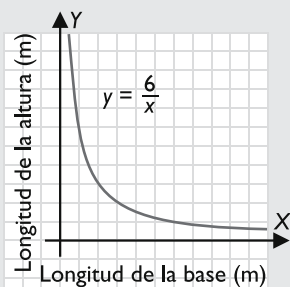
- Halla la función que expresa uno de los lados en función del otro.
- Identifica la función obtenida.
- Representa gráficamente dicha función.

**Solución:**

a)  $x \cdot y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



- 122** En un cuadrado de un metro de lado se unen los puntos medios, formando otro cuadrado. En este se vuelven a unir sus puntos medios para formar un tercer cuadrado, y así se repite el proceso indefinidamente.

- Expresa la fórmula que da el perímetro de los sucesivos cuadrados.
- Expresa la fórmula que da el área de los sucesivos cuadrados.

**Solución:**

a) Los lados de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Luego los perímetros serán:

$$P(n) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

b) Las áreas serán:

$$A(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- 123** Las funciones de oferta y de demanda de un determinado producto, son respectivamente:

$$O(x) = \frac{x^2}{4} - 200 \text{ y } D(x) = 1000 - \frac{x^2}{2}$$

donde  $x$  es el precio del producto en euros y  $O(x)$  y  $D(x)$  el número de unidades por 10 000. Encuentra la cantidad de equilibrio.

**Solución:**

$$O(x) = D(x)$$

$$\frac{x^2}{4} - 200 = 1000 - \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 - 800 = 4000 - 2x^2$$

$$3x^2 = 4800$$

$$x^2 = 1600$$

$$x = 40 \text{ €}$$

$$x = -40 \text{ no tiene sentido}$$