

Unidad 4.

Continuidad, límites y asíntotas

1. Funciones especiales

Piensa y calcula

Copia y completa la siguiente tabla:

	x	0,3	-0,3	1,8	-1,8	2,4	-2,4	3,9	-3,9
Parte entera de x	Ent(x)								
Parte decimal de x	Dec(x)								
Valor absoluto de x	x								

Solución:

	x	0,3	-0,3	1,8	-1,8	2,4	-2,4	3,9	-3,9
Parte entera de x	Ent(x)	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4
Parte decimal de x	Dec(x)	0,3	0,7	0,8	0,2	0,4	0,6	0,9	0,1
Valor absoluto de x	x	0,3	0,3	1,8	1,8	2,4	2,4	3,9	3,9

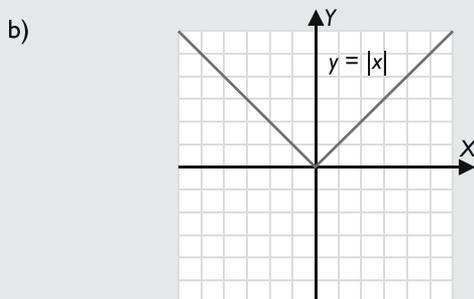
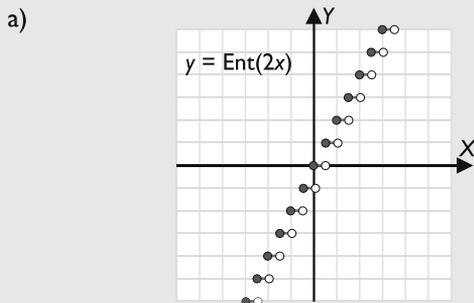
Aplica la teoría

1 Representa las funciones:

a) $y = \text{Ent}(2x)$

b) $y = |x|$

Solución:

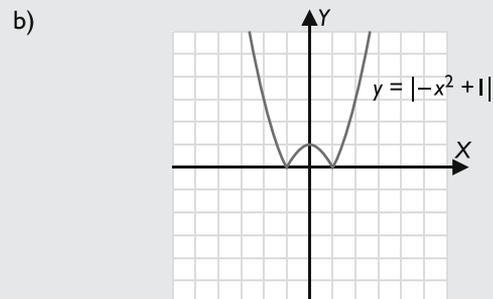
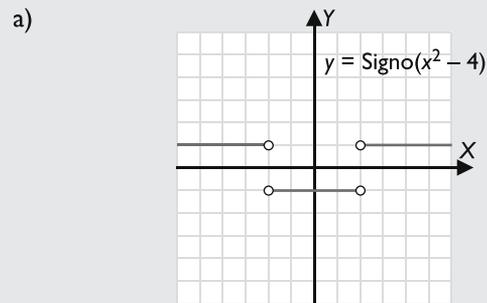


2 Representa las funciones:

a) $y = \text{Signo}(x^2 - 4)$

b) $y = |-x^2 + 1|$

Solución:



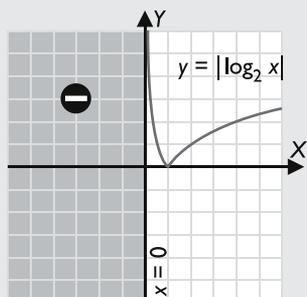
3 Representa las funciones:

a) $y = |\log_2 x|$

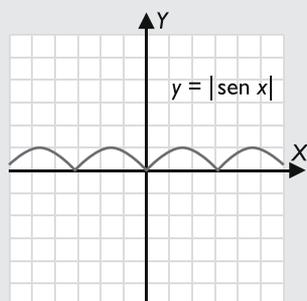
b) $y = |\sin x|$

Solución:

a)



b)



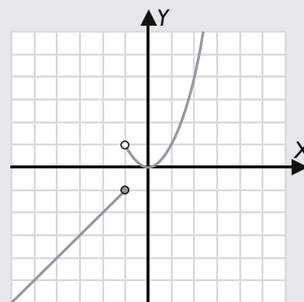
4 Representa las funciones:

a) $y = \begin{cases} x & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

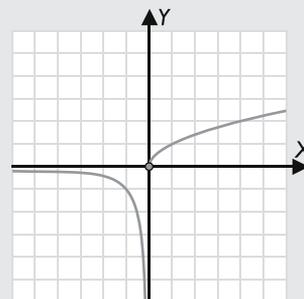
b) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Solución:

a)



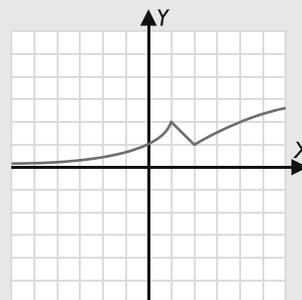
b)



5 Representa la función:

$$y = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 3 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \log_2 x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:



2. Continuidad

Piensa y calcula

Copia y completa las siguientes tablas:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
$y = \text{Ent}(x)$				

x	2,1	2,01	2,001	2,0001
$y = \text{Ent}(x)$				

Solución:

x	1,9	1,99	1,999	1,9999
$y = \text{Ent}(x)$	1	1	1	1

x	2,1	2,01	2,001	2,0001
$y = \text{Ent}(x)$	2	2	2	2

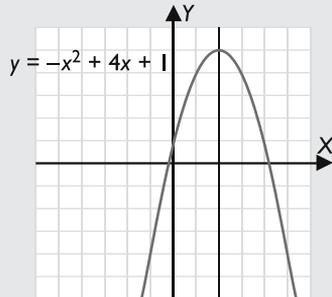
Aplica la teoría

6 Representa las siguientes funciones y estudia la continuidad analizando su gráfica:

- a) $y = -x^2 + 4x + 1$
 b) $y = \frac{2}{x}$
 c) $y = \sqrt{x}$

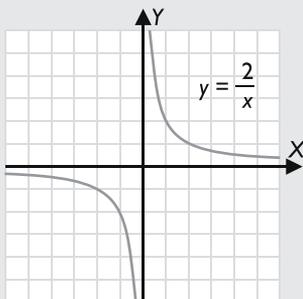
Solución:

a)



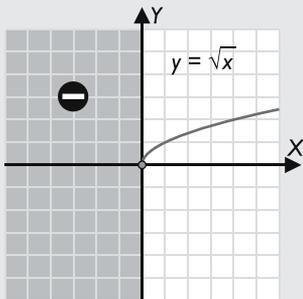
Es una parábola y es continua en todo \mathbb{R}

b)



Es una hipérbola y es discontinua en $x = 0$

c)

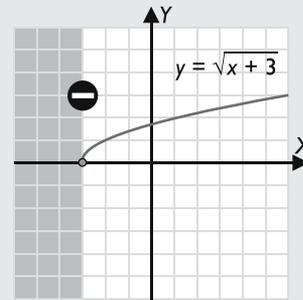


Es una función irracional y es continua en todo su dominio, $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

7 Representa la función $f(x) = \sqrt{x+3}$ y calcula los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

Solución:

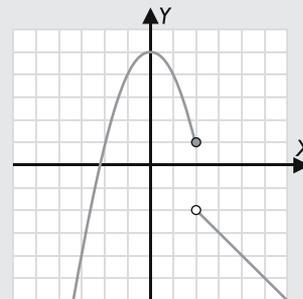


a) $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+3} = 2$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+3} = 1$

8 Representa la siguiente función y calcula los límites laterales en $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5 & \text{si } x \leq 2 \\ -x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:



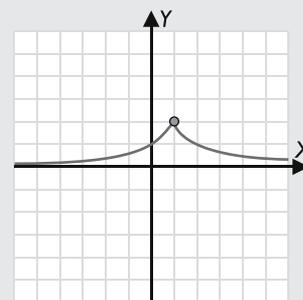
$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x) = -2$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 5) = 1$

9 Representa la siguiente función y estudia la continuidad en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:



$f(1) = 2^1 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2$

La función es continua en $x = 1$

3. Discontinuidades

Piensa y calcula

Copia y completa la siguiente sucesión:

2,9 2,99    → 3⁻ 3 3⁺ ←    3,01 3,1

Solución:

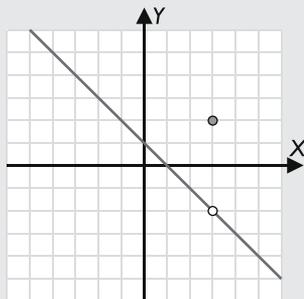
2,9 2,99 2,999 2,9999 2,99999 → 3⁻ 3 3⁺ ← 3,00001 3,0001 3,001 3,01 3,1

Aplica la teoría

10 Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Solución:



Se estudia el punto $x = 3$

$$f(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 1) = -2$$

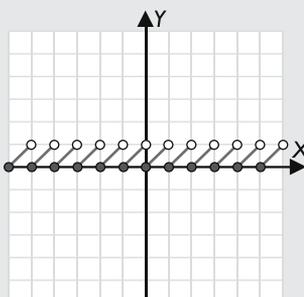
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x + 1) = -2$$

La función es discontinua en $x = 3$, donde tiene una discontinuidad evitable.

Se evita definiendo $f(3) = -2$

11 Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades: $y = \text{Dec}(x)$

Solución:

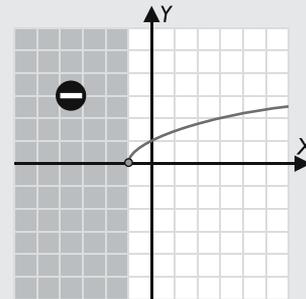


Es discontinua en los números enteros, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto uno.

12 Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$y = \sqrt{x + 1}$$

Solución:



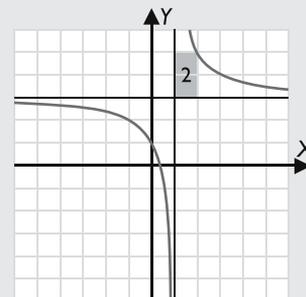
Es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de segunda especie, ya que no existe el límite lateral por la izquierda.

13 Representa la función y estudia sus discontinuidades:

$$y = \frac{3x - 1}{x - 1}$$

Solución:

$$y = 3 + \frac{2}{x - 1}$$

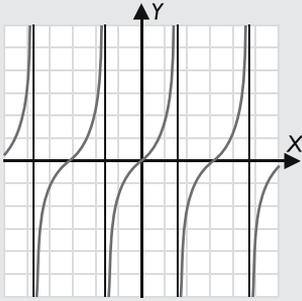


Es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

14 Representa la función y estudia sus discontinuidades:

$$y = \operatorname{tg} x$$

Solución:

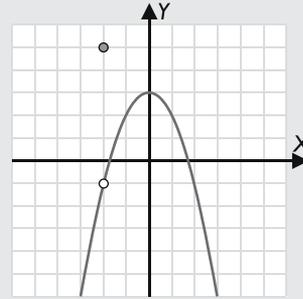


Es discontinua en $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

15 Representa la función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x \neq -2 \\ 5 & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

Solución:



Es discontinua en $x = -2$, donde tiene una discontinuidad evitable. Se evita definiendo $f(-2) = -1$

4. Límites de funciones polinómicas y racionales

Piensa y calcula

Calcula mentalmente los siguientes cocientes y di cuál o cuáles no tienen solución, tienen una solución o tienen muchas soluciones.

- a) $\frac{6}{2}$ b) $\frac{0}{0}$ c) $\frac{0}{5}$ d) $\frac{5}{0}$

Solución:

- a) 3 b) Muchas soluciones. c) 0 d) No tiene solución.

Aplica la teoría

16 Calcula mentalmente los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + 3x - 7)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 5x^3 + 3)$

Solución:

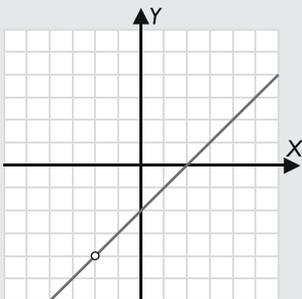
- a) $-\infty$ b) $+\infty$

17 Calcula los siguientes límites y representa la función correspondiente:

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x + 5}{x - 1}$

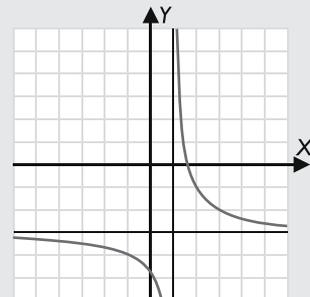
Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3x + 5}{x - 1} &= \frac{-3 \cdot 1^+ + 5}{1^+ - 1} = \frac{-3 + 5}{0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3x + 5}{x - 1} &= \frac{-3 \cdot 1^- + 5}{1^- - 1} = \frac{-3 + 5}{0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

No existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



18 Calcula mentalmente los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x}{-2x^2 + 7}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x}{-2x^2 + 7}$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^5 + 3x^2}{7x^3 - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5 + 3x^2}{7x^3 - 1}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{4x^3 - 5}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3}{4x^3 - 5}$

Solución:

- a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) 0 f) 0

5. Límites de funciones irracionales y límites de operaciones

Piensa y calcula

Halla el resultado de operar los siguientes símbolos; puede dar $+\infty$, $-\infty$ o indeterminado.

- a) $+\infty + \infty$ b) $+\infty - \infty$ c) $-\infty + \infty$ d) $-\infty - \infty$

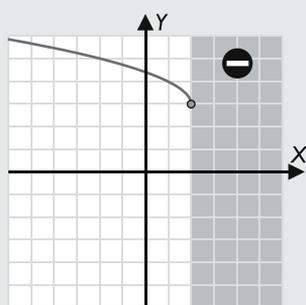
Solución:

- a) $+\infty$ b) Indeterminado. c) Indeterminado. d) $-\infty$

Aplica la teoría

19 Representa la función $f(x) = 3 + \sqrt{2-x}$. Halla el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow 2^-$

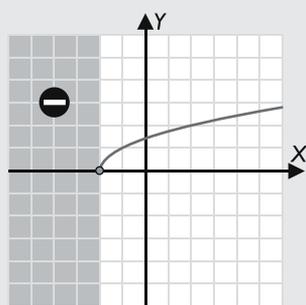
Solución:



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (3 + \sqrt{2-x}) = 3$$

20 Representa la función $f(x) = \sqrt{x+2}$. Halla el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$

Solución:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} = +\infty$$

21 Halla el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2 + x - 1}{x + 3} - 5x \right)$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x^2 + x - 1}{x + 3} - 5x \right) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + x - 1 - 5x(x + 3)}{x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + x - 1 - 5x^2 - 15x}{x + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-14x - 1}{x + 3} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = -14 \end{aligned}$$

22 Halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(7x^2 - \frac{7x^3 + 14x^2 - 5x}{x + 2} \right)$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(7x^2 - \frac{7x^3 + 14x^2 - 5x}{x + 2} \right) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2(x + 2) - (7x^3 + 14x^2 - 5x)}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 14x^2 - 7x^3 - 14x^2 + 5x}{x + 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{x + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 5 \end{aligned}$$

23 Halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x})$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 6x}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 6x})(x + \sqrt{x^2 + 6x})}{x + \sqrt{x^2 + 6x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 + 6x)}{x + \sqrt{x^2 + 6x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{x + \sqrt{x^2 + 6x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{x + \sqrt{x^2}} = \frac{-6}{1 + 1} = -3 \end{aligned}$$

24 Halla el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x})$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 4x})(\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x})}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 1 - (x^2 - 4x)}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x + 1 - x^2 + 4x}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x + 1}{\sqrt{x^2 + 5x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{9x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

25 Halla el límite de la siguiente sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 5} - \sqrt{n^2 + 1})$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 5} - \sqrt{n^2 + 1}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 3n - 5} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 3n - 5} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 3n - 5} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n - 5 - (n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 3n - 5} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 3n - 5 - n^2 - 1}{\sqrt{n^2 + 3n - 5} + \sqrt{n^2 + 1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n - 6}{\sqrt{n^2 + 3n - 5} + \sqrt{n^2 + 1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2} + \sqrt{n^2}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

26 Halla el límite de la siguiente sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 5n})$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (3n - \sqrt{9n^2 + 5n}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n - \sqrt{9n^2 + 5n})(3n + \sqrt{9n^2 + 5n})}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n^2 - (9n^2 + 5n)}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{9n^2 - 9n^2 - 5n}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n}{3n + \sqrt{9n^2 + 5n}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-5n}{3n + \sqrt{9n^2}} = \frac{-5}{3 + 3} = -\frac{5}{6} \end{aligned}$$

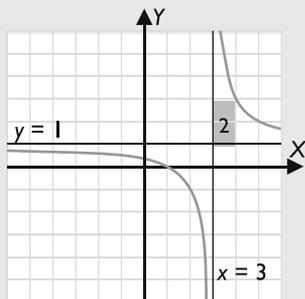
6. Asíntotas de funciones racionales

Piensa y calcula

Dibuja la siguiente hipérbola, halla sus asíntotas y represéntalas.

$$y = \frac{2}{x-3} + 1$$

Solución:



Asíntotas:

Vertical: $x = 3$

Horizontal: $y = 1$

Aplica la teoría

Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

27 $y = \frac{x^2 + 4}{2x}$

Solución:

• Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

• Horizontal: no tiene.

• Oblicua:

$$y = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x^2 + 4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{4}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0^- \Rightarrow \text{La curva está debajo de la asíntota.}$$

$$28 \quad y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$$

Solución:

- Verticales: $1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2}{1 - x} = \frac{1^+ - 1^+ - 2}{1 - 1^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{1 - x} = \frac{1^- - 1^- - 2}{1 - 1^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

- Horizontal: no tiene.

- Oblicua:

$$\frac{x^2 - x - 2}{-x^2 + x} \cdot \frac{-x + 1}{-x} = \frac{-2}{-2}$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{1 - x} = -x - \frac{2}{-x + 1} = -x + \frac{2}{x - 1}$$

$$y = -x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 1} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x - 1} = 0^- \Rightarrow \text{La curva está debajo de la asíntota.}$$

$$29 \quad y = \frac{6x}{x^2 + 3}$$

Solución:

- Verticales: no tiene.

- Horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2 + 3} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2 + 3} = 0^- \Rightarrow \text{La curva está debajo de la asíntota.}$$

- Oblicua: no tiene.

$$30 \quad y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

Solución:

- Verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^+}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^-}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^-}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{1^+}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

- Oblicua: no tiene.

Ejercicios y problemas propuestos

Ejercicios propuestos

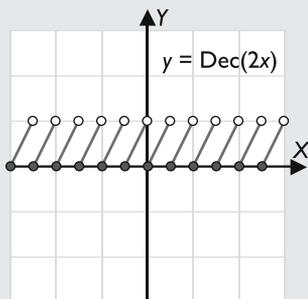
1. Funciones especiales

31 Representa las funciones:

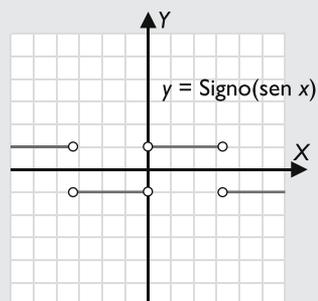
- a) $y = \text{Dec}(2x)$ b) $y = \text{Signo}(\text{sen } x)$

Solución:

a)



b)

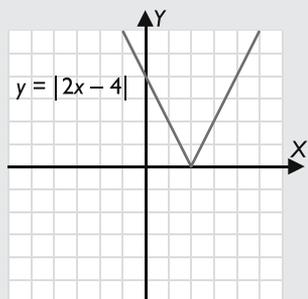


32 Representa las funciones:

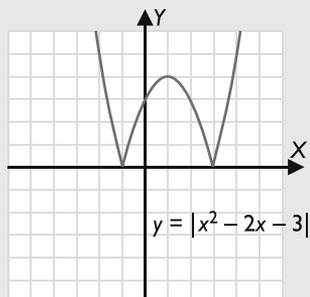
- a) $y = |2x - 4|$ b) $y = |x^2 - 2x - 3|$

Solución:

a)



b)

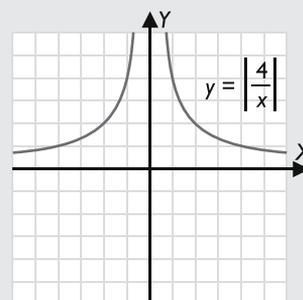


33 Representa las funciones:

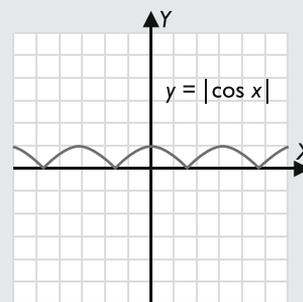
- a) $y = \left| \frac{4}{x} \right|$
b) $y = |\cos x|$

Solución:

a)

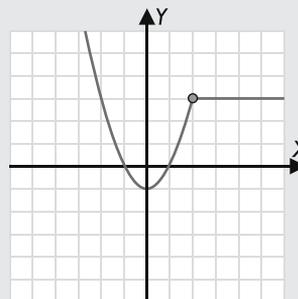


b)



34 Representa la función: $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

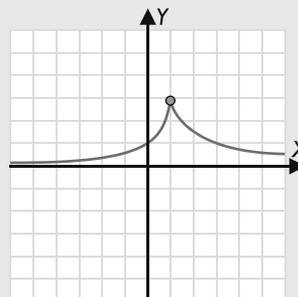
Solución:



35 Representa la función:

$$y = \begin{cases} 3^x & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

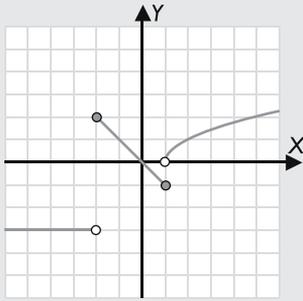
Solución:



36 Representa la función:

$$y = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

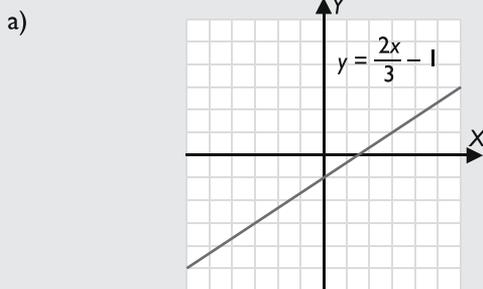


2. Continuidad

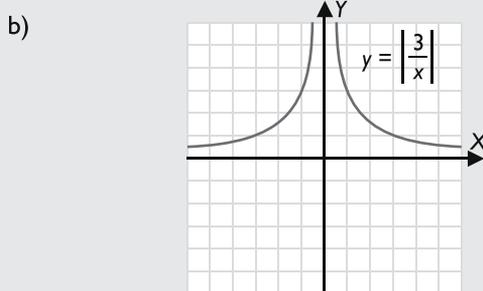
37 Representa las siguientes funciones y estudia la continuidad de forma gráfica:

a) $y = \frac{2x}{3} - 1$ b) $y = \left| \frac{3}{x} \right|$

Solución:



Es una recta y es continua en todo \mathbb{R}

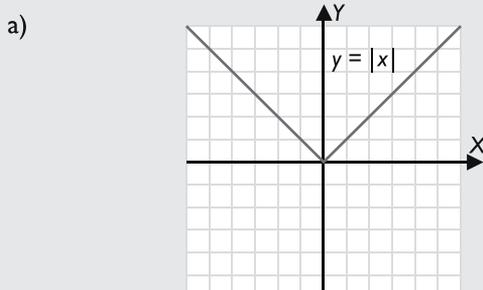


Es el valor absoluto de una función racional, de una hipérbola y es discontinua en $x = 0$

38 Representa las siguientes funciones y estudia la continuidad de forma gráfica:

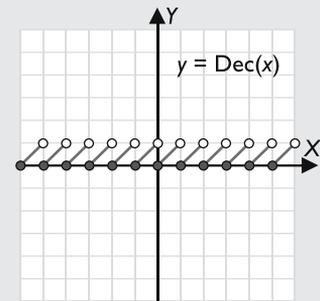
a) $y = |x|$ b) $y = \text{Dec}(x)$

Solución:



Es el valor absoluto de una función polinómica y es continua en todo \mathbb{R}

b)



Es la función parte decimal y es discontinua en todos los puntos de abscisa entera.

39 Representa la función:

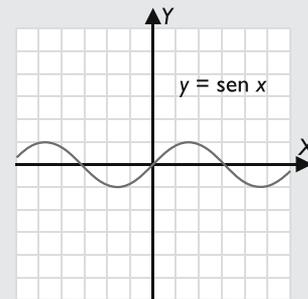
$$f(x) = \text{sen } x$$

y calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$

Solución:



a) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \text{sen } x = 1$

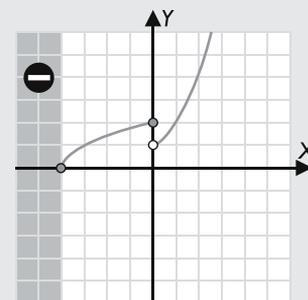
b) $\lim_{x \rightarrow \pi} \text{sen } x = 0$

40 Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} & \text{si } x \leq 0 \\ 2^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

y calcula los límites laterales en $x = 0$

Solución:



a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$

41 Representa la función:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -1 \\ \frac{3}{x+2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

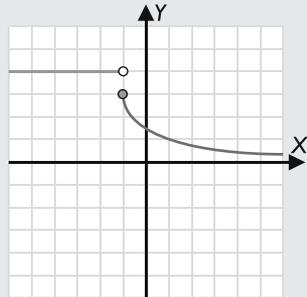
y estudia la continuidad en $x = -1$

Solución:

$$f(-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4$$



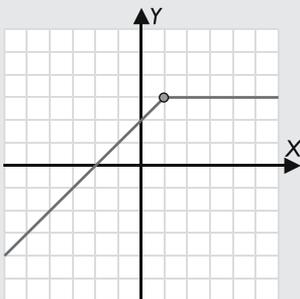
La función es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de salto finito de 1

3. Discontinuidades

42 Representa la función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:



Se estudia el punto $x = 1$

$$f(1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3$$

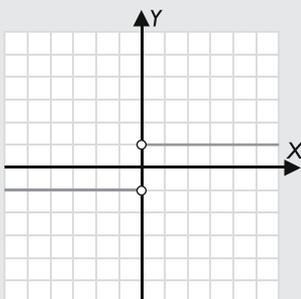
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 3$$

La función es continua en $x = 1$; por tanto, es continua en todo \mathbb{R}

43 Representa la función y estudia sus discontinuidades:
 $y = \text{Signo}(x)$

Solución:

a)



Se estudia el punto $x = 0$

$$f(0) = \text{no existe}$$

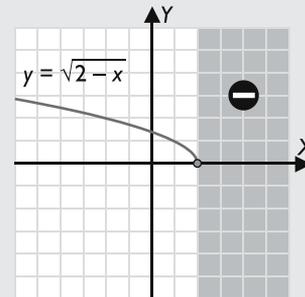
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Signo}(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{Signo}(x) = -1$$

La función es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto finito de 2 unidades.

44 Representa la función y estudia sus discontinuidades:
 $y = \sqrt{2-x}$

Solución:

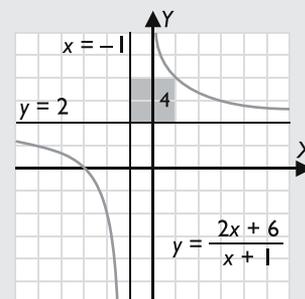


Es discontinua en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de segunda especie, ya que no existe el límite lateral por la derecha.

45 Representa la función y estudia sus discontinuidades:

$$y = \frac{2x+6}{x+1}$$

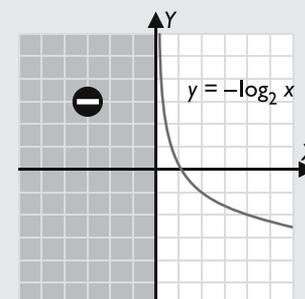
Solución:



Es discontinua en $x = -1$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

46 Representa la función y estudia sus discontinuidades:
 $y = -\log_2 x$

Solución:

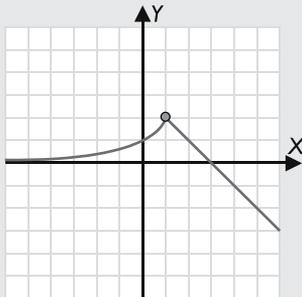


Es continua en todo su dominio, es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de segunda especie, ya que no existe el límite lateral por la izquierda.

47 Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x < 1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:



Se estudia el punto $x = 1$

$$f(1) = -1 + 3 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2$$

La función es continua en $x = 1$

4. Límites de funciones polinómicas y racionales

48 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1)$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 + 7x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5) = +\infty$

49 Calcula el siguiente límite:

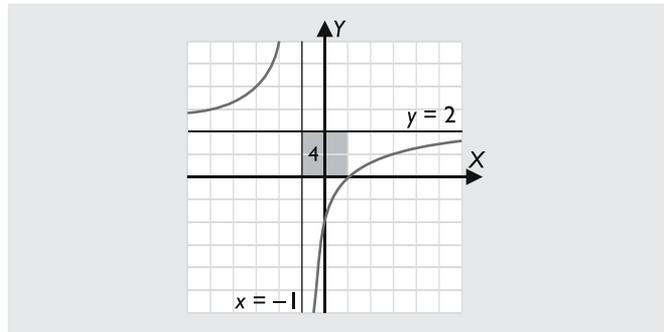
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 2}{x + 1}$$

Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x - 2}{x + 1} = \frac{2 \cdot (-1^+) - 2}{(-1^+) + 1} = \frac{-2 - 2}{0^+} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x - 2}{x + 1} = \frac{2 \cdot (-1^-) - 2}{(-1^-) + 1} = \frac{-2 - 2}{0^-} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$$



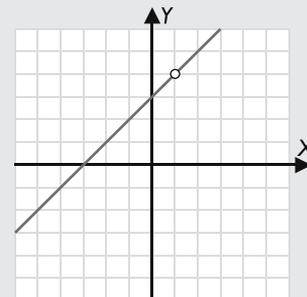
50 Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

Representa la función correspondiente.

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$



51 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 1}{9x^2 + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{9x^2 + 5}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 1}{9x^2 + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x + 1}{9x^2 + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = 0$

52 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = -3$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 - 5}{-x^4 + 2x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = -3$

Ejercicios y problemas propuestos

53 Calcula mentalmente los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x}$

Solución:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5 + 7x^3}{4x^2 - 3x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty$

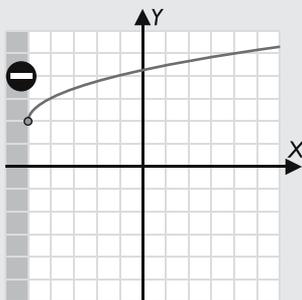
5. Límites de funciones irracionales y límites de operaciones

54 Representa la función:

$$f(x) = 2 + \sqrt{x+5}$$

Halla el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -5^+$

Solución:



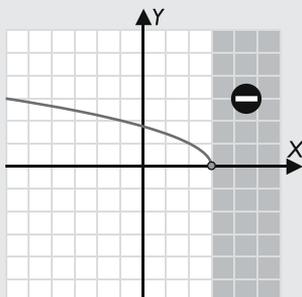
$$\lim_{x \rightarrow -5^+} (2 + \sqrt{x+5}) = 2$$

55 Representa la función:

$$f(x) = \sqrt{3-x}$$

Halla el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -\infty$

Solución:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-x} = +\infty$$

56 Halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x + 1} \right)$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - \frac{6x^2 + 5x - 4}{2x + 1} \right) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(2x + 1) - (6x^2 + 5x - 4)}{2x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 + 3x - 6x^2 - 5x + 4}{2x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{6x^2} + 3x - \cancel{6x^2} - 5x + 4}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 4}{2x + 1} = \\ &= \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

57 Halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x^3 + x^2 - 7}{2x^2 + 3} - 5x \right)$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{10x^3 + x^2 - 7}{2x^2 + 3} - 5x \right) &= [-\infty + \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x^3 + x^2 - 7 - 5x(2x^2 + 3)}{2x^2 + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{10x^3} + x^2 - 7 - \cancel{10x^3} - 15x}{2x^2 + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 15x - 7}{2x^2 + 3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

58 Halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 - 3x})$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 - 3x}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x - \sqrt{4x^2 - 3x})(2x + \sqrt{4x^2 - 3x})}{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 3x}{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x + \sqrt{4x^2 - 3x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2x + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

59 Halla el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + 2x - 1} - \sqrt{x^3 - 5x})$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3 + 2x - 1} - \sqrt{x^3 - 5x}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^3 + 2x - 1} - \sqrt{x^3 - 5x})(\sqrt{x^3 + 2x - 1} + \sqrt{x^3 - 5x})}{\sqrt{x^3 + 2x - 1} + \sqrt{x^3 - 5x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 1 - x^3 + 5x}{\sqrt{x^3 + 2x - 1} + \sqrt{x^3 - 5x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x - 1}{\sqrt{x^3 + 2x - 1} + \sqrt{x^3 - 5x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x}{2\sqrt{x^3}} = 0 \end{aligned}$$

60 Halla el límite de la siguiente sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3n-5} - \sqrt{n+2})$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3n-5} - \sqrt{n+2}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3n-5} - \sqrt{n+2})(\sqrt{3n-5} + \sqrt{n+2})}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-5-n-2}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n+2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n-7}{\sqrt{3n-5} + \sqrt{n+2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{3n} + \sqrt{n}} = +\infty \end{aligned}$$

61 Halla el límite de la siguiente sucesión:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 5 - \sqrt{4n^2 - 7n})$$

Solución:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - 5 - \sqrt{4n^2 - 7n}) &= [\infty - \infty] = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n - 5 - \sqrt{4n^2 - 7n})(2n - 5 + \sqrt{4n^2 - 7n})}{2n - 5 + \sqrt{4n^2 - 7n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 20n + 25 - 4n^2 + 7n}{2n - 5 + \sqrt{4n^2 - 7n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-13n + 25}{2n - 5 + \sqrt{4n^2 - 7n}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-13n}{2n + 2n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-13n}{4n} = -\frac{13}{4} \end{aligned}$$

6. Asíntotas de funciones racionales

62 Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

$$a) y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} \quad b) y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución:

a) • Verticales: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1^+ - 3 \cdot 1^+ + 3}{1^+ - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = \frac{1^- - 3 \cdot 1^- + 3}{1^- - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

• Horizontal: no tiene.

• Oblicua:

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{-x^2 + x} \quad \left| \frac{x-1}{x-2} \right.$$

$$\frac{-2x + 3}{2x - 2}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1} = x - 2 + \frac{1}{x - 1}$$

La asíntota es: $y = x - 2$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x - 1} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

b) • Verticales: no tiene.

• Horizontal:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 + 3} = 1 \Rightarrow$ La asíntota es: $y = 1$

$$\frac{x^2}{x^2 + 3} - 1 = \frac{x^2 - x^2 - 3}{x^2 + 3} = \frac{-3}{x^2 + 3}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3}{x^2 + 3} \right) = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{x^2 + 3} \right) = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

• Oblicua: no tiene.

63 Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

$$a) y = \frac{x}{4 - x^2} \quad b) y = \frac{2x - 1}{x^2}$$

Solución:

a) • Verticales: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{4 - x^2} = \frac{2^+}{4 - 4^+} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{4 - x^2} = \frac{2^-}{4 - 4^-} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{4 - x^2} = \frac{-2^+}{4 - 4^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{4 - x^2} = \frac{-2^-}{4 - 4^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

• Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{4 - x^2} = 0 \Rightarrow$$
 La asíntota es: $y = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4 - x^2} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4 - x^2} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.

• Oblicua: no tiene.

b) • Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2 \cdot 0^+ - 1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2 \cdot 0^- - 1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

• Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow \text{La asíntota es: } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2} = 0^- \Rightarrow \text{La curva está debajo de la asíntota.}$$

• Oblicua: no tiene.

64 Halla las asíntotas de las siguientes funciones racionales y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

a) $y = \frac{5}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$

Solución:

a) • Verticales: no tiene.

• Horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \text{La asíntota es: } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2 + 1} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^2 + 1} = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

• Oblicua: no tiene.

b) • Verticales: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \frac{0^+ + 2 \cdot 0^+ - 1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \frac{0^+ + 2 \cdot 0^- - 1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

• Horizontal: no tiene.

• Oblicua:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} = x + 2 + \frac{-1}{x}$$

La asíntota es $y = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^- \Rightarrow \text{La curva está debajo de la asíntota.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0^+ \Rightarrow \text{La curva está encima de la asíntota.}$$

Para ampliar

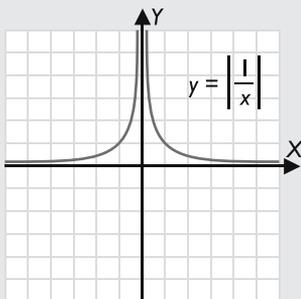
65 Representa las funciones:

a) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$

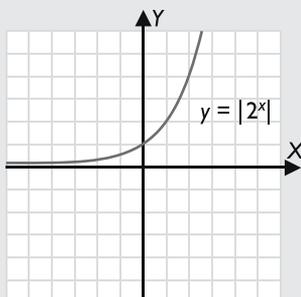
b) $f(x) = |2^x|$

Solución:

a)

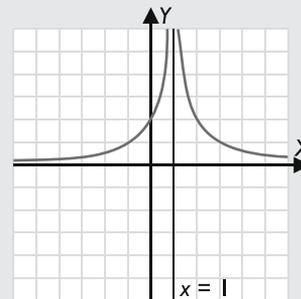


b)



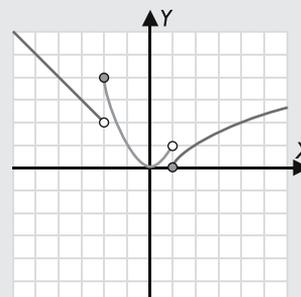
66 Representa la función: $f(x) = \left|\frac{2}{x-1}\right|$

Solución:



67 Representa la función: $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \log_2 x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Solución:



68 Halla el dominio y el campo de continuidad de cada una de las siguientes funciones, es decir, el conjunto donde es continua, y razona por qué son iguales o distintos.

a) $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 4$

b) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2+4}$

d) $f(x) = \sqrt{x-3}$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Las funciones polinómicas son continuas en todo \mathbb{R}

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

b) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

El punto $x = 1$ de discontinuidad no está en el dominio.

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

No hay ningún punto de discontinuidad.

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

d) $\text{Dom}(f) = [3, +\infty)$

$C(f) = [3, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

69 Halla el dominio y el campo de continuidad de cada una de las siguientes funciones y razona por qué son iguales o distintos.

a) $f(x) = 2^x$

b) $f(x) = \log_2 x$

c) $f(x) = \text{sen } x$

d) $f(x) = \text{tg } x$

e) $f(x) = \text{Ent}(x)$

f) $f(x) = \text{Signo}(x)$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

b) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$C(f) = (0, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$C(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

d) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$C(f) = \mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

El dominio y el campo de continuidad son iguales por estar definida la función por una sola fórmula.

e) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$C(f) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

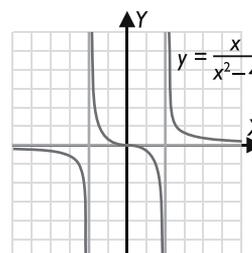
El dominio y el campo de continuidad no son iguales. Se observa que la función no está definida por una fórmula analítica.

f) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$C(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

El dominio y el campo de continuidad no son iguales. Se observa que la función no está definida por una fórmula analítica.

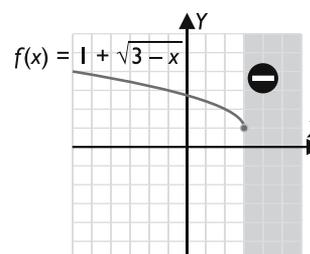
70 Halla y clasifica las discontinuidades de la siguiente función a partir de su gráfica:



Solución:

Es discontinua en $x = -2$ y en $x = 2$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

71 Halla y clasifica las discontinuidades de la siguiente función a partir de su gráfica:



Solución:

Es discontinua en $x = 3$, donde tiene una discontinuidad de segunda especie porque no existe el límite lateral por la derecha.

82 Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{3x-5}}$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(\sqrt{x+8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8} + 3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{1+8} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{1-\sqrt{3x-5}} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{3x-5})}{(1-\sqrt{3x-5})(1+\sqrt{3x-5})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{3x-5})}{1-3x+5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(1+\sqrt{3x-5})}{-3x+6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(1+\sqrt{3x-5})}{-3\cancel{(x-2)}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+\sqrt{3x-5}}{-3} = \frac{1+\sqrt{6-5}}{-3} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

83 Halla una función racional que tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

84 Halla una función racional que tenga como asíntota horizontal la recta $y = 3$

Solución:

$$f(x) = \frac{3x}{x+5}$$

85 Halla una función racional que tenga como asíntota oblicua la recta $y = 2x - 1$

Solución:

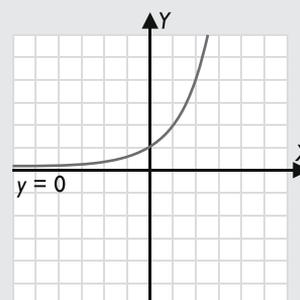
$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - x + 1}{x}$$

86 Representa y halla mentalmente las asíntotas de las siguientes funciones exponenciales:

- a) $y = 2^x$
- b) $y = -5 + 2^{x-1}$
- c) $y = -3 + 2^x$
- d) $y = 1 + 2^{x-1}$

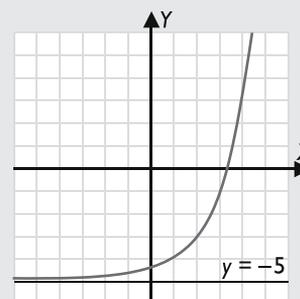
Solución:

a)



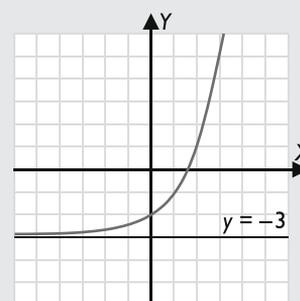
Horizontal: $y = 0$

b)



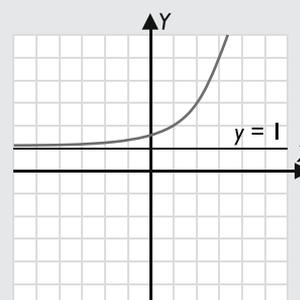
Horizontal: $y = -5$

c)



Horizontal: $y = -3$

d)



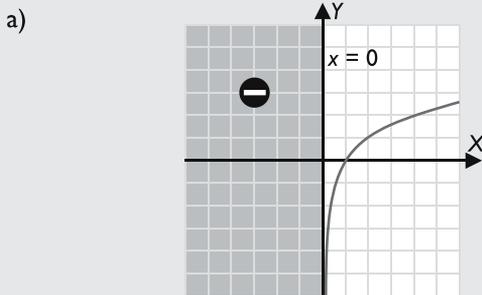
Horizontal: $y = 1$

Ejercicios y problemas propuestos

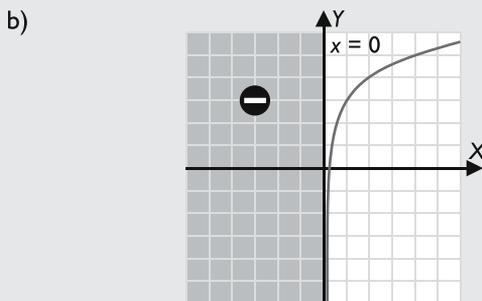
87 Representa y halla mentalmente las asíntotas de las siguientes funciones logarítmicas:

- a) $y = \log_2 x$
- b) $y = 3 + \log_2 x$
- c) $y = \log_2 (x + 3)$
- d) $y = 1 + \log_2 (x - 3)$

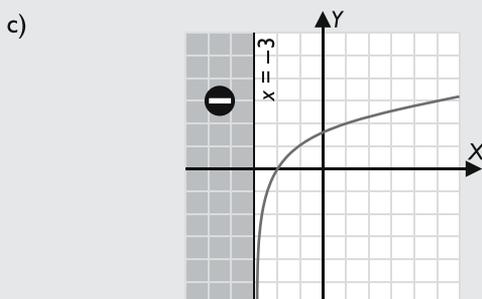
Solución:



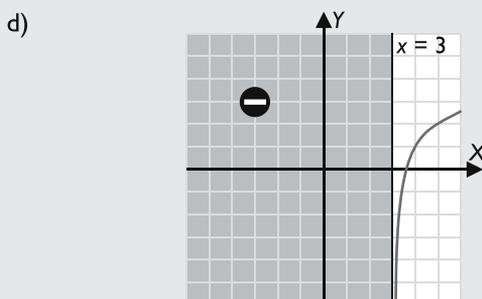
Vertical: $x = 0$



Vertical: $x = 0$



Vertical: $x = -3$



Vertical: $x = 3$

88 Dada la función: $f(x) = \frac{1}{x}$

a) Copia y completa mentalmente las siguientes tablas:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$				

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x)$				

b) Observando las tablas, induce los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$$

c) Calcula $f(0)$, razona si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y, en caso negativo, clasifica la discontinuidad.

Solución:

a)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	10	100	1 000	10 000

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x)$	-10	-100	-1 000	-10 000

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

c) $f(0)$ no existe y viendo los límites laterales obtenidos en el apartado b), la función es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.

Con calculadora

89 Dada la función: $f(x) = 2^x$

a) Copia y completa las siguientes tablas:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$				

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x)$				

b) Observando las tablas, induce los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x$$

c) Calcula $f(0)$ y razona si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$

Solución:

a)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
$f(x)$	1,07	1,007	1,0007	1,00007

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
$f(x)$	0,9	0,99	0,999	0,9999

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^x = 1$

c) $f(0) = 1$ y, viendo los límites laterales obtenidos en el apartado b), la función es continua en $x = 0$

90 Dada la función:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

a) Copia y completa las siguientes tablas:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)				

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
f(x)				

b) Observando las tablas, induce los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$$

c) Calcula $f(0)$, razona si la función $f(x)$ es continua en $x = 0$ y clasifica la discontinuidad.

Solución:

a)

x	0,1	0,01	0,001	0,0001
f(x)	0,3	0,1	0,03	0,01

x	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001
f(x)	No existen			

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ no existe.

c) $f(0) = 0$ y, viendo los límites obtenidos en el apartado b), la función es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de segunda especie.

91 Dada la función:

$$f(x) = x^2 + x + 9$$

a) Copia y completa las siguientes tablas:

x	-10	-100	-1 000	-10 000
f(x)				

x	10	100	1 000	10 000
f(x)				

b) Observando las tablas, induce los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 9)$$

Solución:

a)

x	-10	-100	-1 000	-10 000
f(x)	99	9 909	999 009	99 990 009

x	10	100	1 000	10 000
f(x)	119	10 109	1 001 009	100 010 009

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x + 9) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 9) = +\infty$

92 Dada la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

a) Copia y completa la siguiente tabla. En la cuarta fila está el valor de la función menos el valor de la asíntota horizontal.

x	10	100	1 000	10 000
f(x)				
y = 3				
f(x) - 3				

b) Observando la tabla, razona si la curva está encima o debajo de la asíntota.

Solución:

a)

x	10	100	1 000	10 000
f(x)	3,05	3,0005	3,000005	3,00000005
y = 3	3	3	3	3
f(x) - 3	0,05	0,0005	0,000005	0,00000005

b) La curva está encima de la asíntota.

93 Dada la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x}$$

a) Copia y completa la siguiente tabla. En la cuarta fila está el valor de la función menos el valor de la asíntota horizontal.

x	10	100	1 000	10 000
f(x)				
y = 2x + 1				
f(x) - (2x + 1)				

b) Observando la tabla, razona si la curva está encima o debajo de la asíntota.

Solución:

a)

x	10	100	1 000	10 000
f(x)	21,1	201,01	2 001,001	20 001,0001
y = 2x + 1	21	201	2 001	20 001
f(x) - (2x + 1)	0,1	0,01	0,001	0,0001

b) La curva está encima de la asíntota.

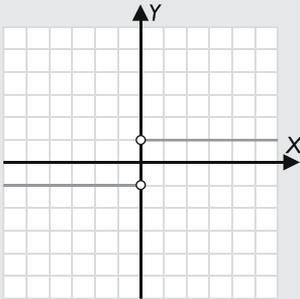
Problemas propuestos

94 Representa la función:

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

¿Qué función es?

Solución:



Es la función $y = \text{Signo}(x)$

95 Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ k & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución:

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - 1) = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} k = k$$

Por tanto, tiene que ser: $k = 3$

96 Halla el valor de n para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} -x + n & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$f(-2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x + n) = -2 + n$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 4 - 1 = 3$$

Por tanto, tiene que ser: $-2 + n = 3 \Rightarrow n = 5$

97 Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{k}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución:

$$f(1) = \frac{k}{1} = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k}{x} = k$$

Por tanto, tiene que ser: $k = 3$

98 Halla el valor de n para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ 3x + n & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución:

$$f(1) = 2^1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2^x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + n) = 3 + n$$

Por tanto, tiene que ser: $3 + n = 2 \Rightarrow n = -1$

99 Los ingresos de una empresa, en función del número de años que lleva funcionando, vienen dados por la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 9 \\ \frac{4x - 30}{x - 7} & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

donde x viene expresado en años, y $f(x)$, en millones de euros.

¿Es continua la función $f(x)$?

Solución:

Sí es continua, porque:

$$f(9) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^-} \sqrt{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 9^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} \frac{4x - 30}{x - 7} = \frac{6}{2} = 3$$

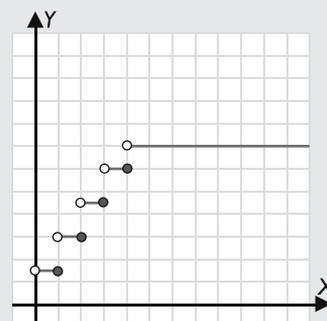
100 En un aparcamiento que permanece abierto 10 horas diarias, hay un cartel que dice: «cada hora, 1,5 €» y «más de 4 horas, 7 €»

a) Representa la función correspondiente.

b) ¿En qué puntos es discontinua, y qué tipo de discontinuidad tiene en cada uno de ellos?

Solución:

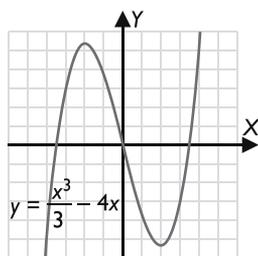
a)



b) Es discontinua en: $x = 1, x = 2, x = 3, x = 4$

En esos puntos tiene una discontinuidad de primera especie de salto finito. En los tres primeros puntos el salto es de 1,5 y en el último el salto es de 1

101 Observando la gráfica:



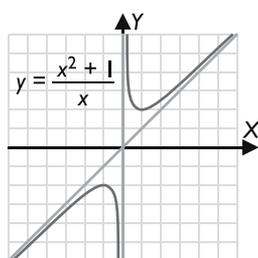
calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right)$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

102 Observando la gráfica:



calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$

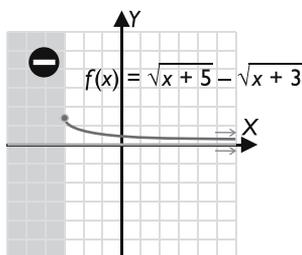
103 Calcula el valor de a para que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 3x}{2x^2 - 5} = 3$$

Solución:

$$\frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$$

104 Observando la gráfica:



- a) Calcula: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3})$
 b) Halla el límite analíticamente para comprobar el resultado.

Solución:

a) 0
 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3}) = [\infty - \infty] =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+5} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5 - (x+3)}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5 - x - 3}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x+3}} = 0$

105 Rocío comienza a trabajar en una empresa de informática. La función que calcula el número de ordenadores que monta, en función del tiempo, viene dada por:

$$f(t) = \frac{6t}{t+5}$$

donde t es el número de días que lleva trabajando, y $f(t)$, el número de ordenadores que monta.

- a) ¿Cuántos ordenadores monta el primer día?
 b) ¿Cuántos ordenadores monta el quinto día?
 c) ¿Cuántos ordenadores monta el décimo día?
 d) ¿Qué día montará 5 ordenadores?
 e) ¿Puede llegar a montar algún día 7 ordenadores?
 f) ¿A qué número tenderá cuando lleve mucho tiempo trabajando?

Solución:

- a) 1
 b) 3
 c) 4
 d) $\frac{6t}{t+5} = 5 \Rightarrow t = 25$
 e) No, porque al resolver la ecuación $\frac{6t}{t+5} = 7$, se obtiene un número negativo.
 f) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t}{t+5} = 6$

106 Los gastos mensuales en euros que una familia tiene en alimentación vienen dados por la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0,4x + k & \text{si } 0 \leq x \leq 1000 \\ \frac{2000x}{x+3000} & \text{si } x > 1000 \end{cases}$$

donde x son los ingresos de la familia en euros.

- a) Halla el valor de k para que los gastos sean continuos; es decir, no haya salto en $x = 1000$ €
 b) ¿Hacia qué valor se estabilizan los gastos de alimentación de las familias con la renta más alta?

Solución:

a) $k = 100$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000x}{x+3000} = 2000$ €

107 En una ciudad se hace un censo inicial y se sabe que el número de habitantes evoluciona según la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 500t + 2\,500}{(t + 50)^2}$$

donde t es el número de años transcurridos desde que se hace el censo, y $P(t)$ es el número de habitantes en millones.

- ¿Cuántos habitantes hay cuando se realiza el censo inicial?
- ¿Cuántos habitantes habrá dentro de 50 años?
- Con el paso del tiempo, ¿hacia qué población se estabilizará? Halla la asíntota horizontal para comprobarlo.

Solución:

- $t = 0 \Rightarrow P(0) = 1$ millón
- $t = 50 \Rightarrow P(50) = 3$ millones
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 500t + 2\,500}{(t + 50)^2} = 1$ millón
Asíntota horizontal: $y = 1$

108 Halla las asíntotas de la siguiente función racional y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

- Verticales: no tiene.
- Horizontal: $y = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x^2 + 1} = 0^- \Rightarrow$ La curva está debajo de la asíntota.
- Oblicua: no tiene.

109 Halla las asíntotas de la siguiente función racional y la posición de la curva respecto de cada una de ellas:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

- Verticales: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^+ + 1}{1^+ - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^- + 1}{1^- - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^- + 1}{1^- - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{1^+ + 1}{1^+ - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$
- Horizontal: $y = 1$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2 - 1} = 0^+ \Rightarrow$ La curva está encima de la asíntota.
- Oblicua: no tiene.

Para profundizar

110 Halla el valor de $f(3)$ para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} x = 3$$

$$f(3) = 3$$

111 Halla el valor de m y n para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq -1 \\ mx + n & \text{si } -1 < x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} -m + n = 1 \\ 2m + n = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 0, n = 1$$

112 Halla el valor de m y n para que la siguiente función sea continua en todo \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ mx + n & \text{si } 1 < x < 2 \\ \log_2 x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = 1 \end{cases} \Rightarrow m = -1, n = 3$$

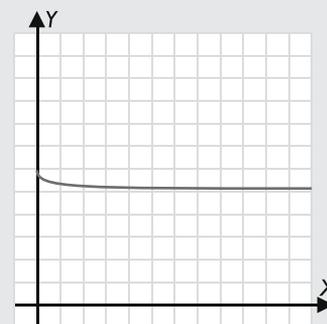
113 Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(t) = 5 + 2^{-t}$$

donde t es el número de años y $f(t)$ son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?

Solución:



La especie no está en vías de extinción, porque tiende a estabilizarse hacia 5 millones de unidades.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (5 + 2^{-t}) = 5$$

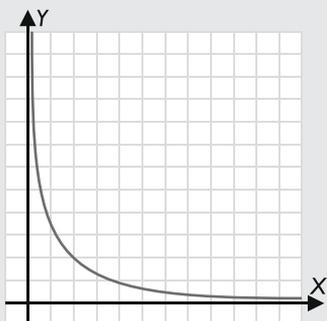
114 Una determinada especie evoluciona según la función:

$$f(t) = \frac{2}{t}, t > 0$$

donde t es el número de años y $f(t)$ son los millones de unidades existentes.

Representa la gráfica y, observándola, contesta a la siguiente pregunta: ¿la especie está en vías de extinción?

Solución:



La especie sí está en vías de extinción, porque tiende hacia 0.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{t} = 0$$

115 Una entidad financiera paga un tanto por ciento en función del dinero depositado, definido por:

$$R(x) = \frac{6x + 8000}{x + 10000}$$

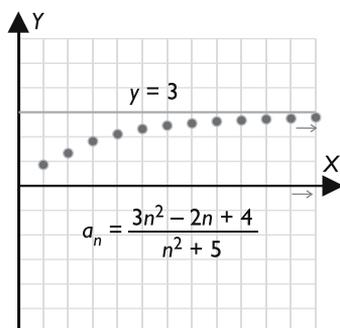
donde x es la cantidad de dinero depositado en euros, y $R(x)$, el valor del tanto por ciento.

¿Hacia qué valor se estabilizará el tanto por ciento cuando se deposite una cantidad muy grande?

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 8000}{x + 10000} = 6\%$$

116 Observando la gráfica de la sucesión:



a) Calcula: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 2n + 4}{n^2 + 5}$

b) Halla el límite analíticamente para comprobar el resultado.

Solución:

a) 3

b) 3

117 Los beneficios o las pérdidas de una empresa vienen dados por la función:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 20}{x^2 + 4}$$

donde x es el número de años que lleva funcionando, y $f(x)$ son millones de euros.

a) Halla los beneficios o las pérdidas en el primer, segundo y tercer años.

b) ¿Hacia qué valor se estabilizan las ganancias o pérdidas con el paso del tiempo?

Solución:

a) $-3, 0, \frac{25}{13} = 1,9$ millones de euros, respectivamente.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 20}{x^2 + 4} = 5$ millones de euros de ganancias.

118 Halla una función racional que tenga como asíntotas verticales las rectas $x = 3$, $x = -1$

Solución:

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

119 Calcula una función racional que tenga como asíntotas las rectas $x = -2$ e $y = 3$

Solución:

$$y = \frac{3x}{x+2}$$

120 Halla una función racional que tenga como asíntotas las rectas $x = 1$ e $y = x - 2$

Solución:

$$y = x - 2 + \frac{1}{x-1} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x-1}$$