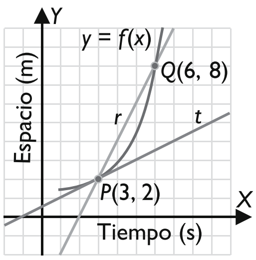
Unidad 5.
La derivada

1. La derivada y la recta tangente

Piensa y calcula

La gráfica $y = f(x)$ representa el espacio que recorre un coche en función del tiempo.



Calcula mentalmente:

a) La pendiente de la recta secante, *r*, que pasa por *P* y *Q*

b) La distancia media recorrida entre 3 s y 6 s

c) La pendiente de la recta tangente *t* en el punto *P*

Solución:

a) 2

b) $TVM[3, 6] = \dfrac{8-2}{6-3} = \dfrac{6}{3} = 2$ m

c) $\dfrac{1}{2}$

Aplica la teoría

1 Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = 2x - 3$ en $[1, 4]$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en $[2, 4]$

c) $f(x) = \dfrac{2x-4}{x+3}$ en $[1, 2]$

d) $f(x) = \sqrt{x+2}$ en $[-1, 2]$

Solución:

a) $TVM[1, 4] = \dfrac{f(4) - f(1)}{4-1} = \dfrac{5-(-1)}{4-1} = \dfrac{6}{3} = 2$

b) $TVM[2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4-2} = \dfrac{2-(-2)}{4-2} = \dfrac{4}{2} = 2$

c) $TVM[1, 2] = \dfrac{f(2) - f(1)}{2-1} = \dfrac{0-(-1/2)}{2-1} = \dfrac{1}{2}$

d) $TVM[-1, 2] = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = \dfrac{2-1}{2-(-1)} = \dfrac{1}{3}$

2 Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 2$ en $x = 1$

b) $f(x) = -2x + 1$ en $x = -3$

c) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$

d) $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ en $x = 1$

Solución:

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3(1+h) - 2 - (3-2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{3} + 3h - \cancel{2} - \cancel{3} + \cancel{2}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$

b) $f'(-3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-3+h) - f(-3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2(-3+h) + 1 - [-2 \cdot (-3) + 1]}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{6} - 2h + \cancel{1} - \cancel{6} - \cancel{1}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2\cancel{h}}{\cancel{h}} = -2$

c) $f'(-2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(-2+h)^2 - 4 - [(-2)^2 - 4]}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{4} - 4h + h^2 - \cancel{4} - 0}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-4h + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}(-4+h)}{\cancel{h}} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (-4 + h) = -4$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-(1+h)^2 + 5(1+h) - 3 - (-1^2 + 5 \cdot 1 - 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\cancel{1} - 2h - h^2 + \cancel{5} + 5h - \cancel{3} + \cancel{1} - \cancel{5} + \cancel{3}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-h^2 + 3h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}(-h+3)}{\cancel{h}} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (-h + 3) = 3$

3 Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x = 1$

b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(1+h)^2 - 1}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} (2 + h) = 2$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1 \Rightarrow P(1, 1)$

- Recta tangente: $m = f'(1) = 2$

  $y = 2(x - 1) + 1$

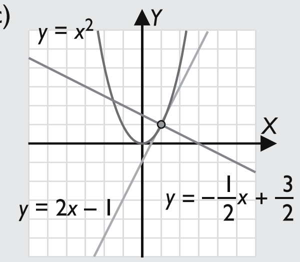
  $y = 2x - 1$

- Recta normal:

  $y = -\dfrac{1}{2}(x - 1) + 1$

  $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

c)



4 Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $x = 3$

b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 3$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

a) $f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 2(3+h) + 1 - (3^2 - 2 \cdot 3 + 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{9} + 6h + h^2 - \cancel{6} - 2h + \cancel{1} - \cancel{9} + \cancel{6} - \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4h + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{h}(4+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (4 + h) = 4$

b) Si $x = 3 \Rightarrow f(3) = 4 \Rightarrow P(3, 4)$

- Recta tangente: $m = f'(3) = 4$

  $y = 4(x - 3) + 4$

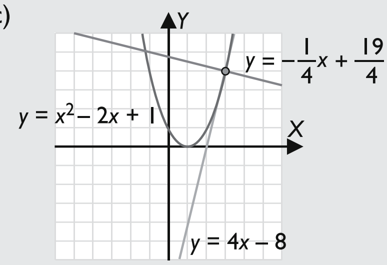
  $y = 4x - 8$

- Recta normal:

  $y = -\dfrac{1}{4}(x - 3) + 4$

  $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{19}{4}$

c)



5 El número de bacterias que hay en un cultivo se expresa mediante la fórmula $f(x) = 2^x$, donde x representa el número de horas. Calcula el crecimiento medio por hora de las bacterias entre las 3 y las 5 horas.

Solución:

$TVM[3, 5] = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{32 - 8}{5 - 3} =$

$= \dfrac{24}{2} = 12$ bacterias/h

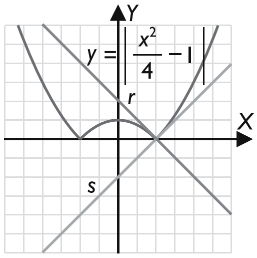
2. Continuidad y derivabilidad

Piensa y calcula

a) Observa la gráfica de la función:

$$f(x) = \left| \frac{x^2}{4} - 1 \right|$$

y calcula las pendientes de las rectas tangentes r y s



b) ¿Se puede dibujar una única recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en $x = 2$?

Solución:

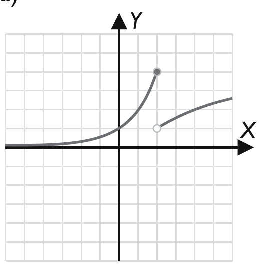
a) $m_r = -1$ y $m_s = 1$

b) No.

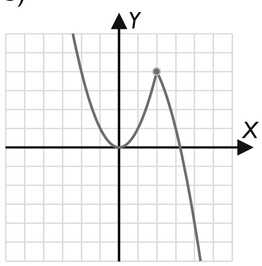
Aplica la teoría

6 Analiza si las funciones representadas admiten derivada en el punto de abscisa $x = 2$

a)



b)



Solución:

a) No, porque la función no es continua.

b) No. Hay dos rectas tangentes diferentes.

7 Aplica la definición de derivada y calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5$

b) $f(x) = 4x - 3$

c) $f(x) = x^2 - x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Solución:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{5 - 5}{h} = 0$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4(x + h) - 3 - (4x - 3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{4x} + 4h - 3 - \cancel{4x} + 3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4\cancel{h}}{\cancel{h}} = 4$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - (x + h) + 1 - (x^2 - x + 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x} - h + \cancel{1} - \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} - \cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h - 1) = 2x - 1$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x + h} - \dfrac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{\cancel{x} - \cancel{x} - h}{(x + h)x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-\cancel{h}}{(x + h)x\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{x(x + h)} = -\dfrac{1}{x^2}$

8 Calcula el valor de la derivada de la función $f(x) = x^2 + 1$ en los puntos de abscisa:

a) $x = 2$ b) $x = -1$ c) $x = 0$ d) $x = 1$

Solución:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{1} - \cancel{x^2} - \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

$f'(x) = 2x$

a) $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

b) $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

c) $f'(0) = 2 \cdot 0 = 0$

d) $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

9 Calcula el valor de la abscisa en el que la derivada de la función $f(x) = x^2 + x$ vale 4

Solución:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + x + h - (x^2 + x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 + \cancel{x} + h - \cancel{x^2} - \cancel{x}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}} + \cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h + 1) = 2x + 1$

$2x + 1 = 4 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

10 Dibuja la gráfica de la función cuadrática $y = x^2$

a) Calcula su función derivada.

b) Representa la función derivada en los mismos ejes coordenados.

c) Observando el dibujo, calcula los puntos en los que la derivada toma estos valores: 1, 2, –1, –2, 0

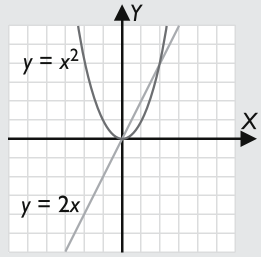
Solución:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{2x\cancel{h} + h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (2x + h) = 2x$

b)



c) $x = \frac{1}{2}, x = 1, x = -\frac{1}{2}, x = -1, x = 0$

3. Tabla de derivadas y regla de la cadena

Piensa y calcula

Clasifica las siguientes funciones como polinómicas, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas:

a) $y = 2^x$ b) $y = x^5$ c) $y = \text{sen } x$ d) $y = \sqrt{x}$ e) $y = \ln x$

Solución:

a) Exponencial. b) Polinómica. c) Trigonométrica. d) Irracional. e) Logarítmica.

Aplica la teoría

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

11 a) $y = 8$

b) $y = -3x + 1$

Solución:

a) $y' = 0$

b) $y' = -3$

12 a) $y = x^2 + 4x - 5$

b) $y = x^4 - 3x^2 + 1$

Solución:

a) $y' = 2x + 4$

b) $y' = 4x^3 - 6x$

13 a) $y = (x - 8)^2$

b) $y = (3x^2 + 1)^3$

Solución:

a) $y' = 2(x - 8)$

b) $y' = 18x(3x^2 + 1)^2$

14 a) $y = (x^2 + 4)^2$

b) $y = (x^4 - 1)^3$

Solución:

a) $y' = 4x(x^2 + 4)$

b) $y' = 12x^3(x^4 - 1)^2$

15 a) $y = \sqrt{x^2 - 3}$

b) $y = \sqrt[4]{x^3 - 2x}$

Solución:

a) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}$

b) $y' = \frac{3x^2 - 2}{4\sqrt[4]{(x^3 - 2x)^3}}$

16 a) $y = e^{3x - 2}$

b) $y = 2^{x^3 + 5}$

Solución:

a) $y' = 3e^{3x - 2}$

b) $y' = 3x^2 2^{x^3 + 5} \ln 2$

17 a) $y = \ln(3x - 2)$ b) $y = \log(2x^3 + x)$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3}{3x - 2}$ b) $y' = \dfrac{6x^2 + 1}{2x^3 + x} \log e$

18 a) $y = \operatorname{sen}(3x - 7)$ b) $y = \cos(x^2 + 4x)$

Solución:

a) $y' = 3\cos(3x - 7)$ b) $y' = -(2x + 4)\operatorname{sen}(x^2 + 4x)$

19 a) $y = x^2 + \operatorname{tg} x$ b) $y = x \ln x$

Solución:

a) $y' = 2x + \sec^2 x$ b) $y' = 1 + \ln x$

20 a) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ b) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$ b) $y' = \dfrac{e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)}{\cos^2 x}$

21 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

$f(1) = -2 \Rightarrow P(1, -2)$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

- Recta tangente:

  $f'(1) = -3$

  $y = -3(x - 1) - 2 \Rightarrow y = -3x + 1$

- Recta normal:

  $y = \dfrac{1}{3}(x - 1) - 2 \Rightarrow y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{7}{3}$

22 Calcula el valor de los parámetros a y b para que la función

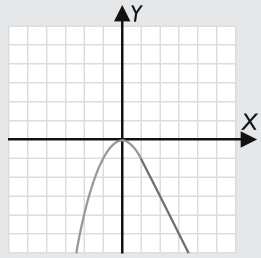
$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \le 1 \\ -2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 1$

Solución:

a) Continuidad de la función:

Para que la función sea continua los límites laterales deben existir y ser iguales al valor de la función.



$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} ax^2 = a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-2x + b) = -2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow a = -2 + b \quad (1)$$

b) Derivabilidad calculando las derivadas laterales.

Para que exista la derivada, las derivadas laterales deben ser iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 2ax = 2a \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-2) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$

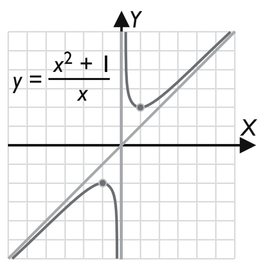
Sustituyendo $a = -1$ en la fórmula (I) $-1 = -2 + b \Rightarrow b = 1$

La función es derivable en $x = 1$ para $a = -1, b = 1$

4. Extremos relativos y crecimiento

Piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ y halla:



a) Los máximos y mínimos relativos.

b) La monotonía, es decir: los intervalos donde es creciente (↗) y los intervalos donde es decreciente (↘)

Solución:

a) Máximo relativo: $A(-1, -2)$

Mínimo relativo: $B(1, 2)$

b) Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

Aplica la teoría

23 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

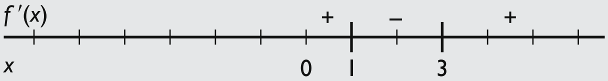
$x = 1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(1, 4)$

$x = 3 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(3, 0)$

$y'' = 6x - 12$

$y''(1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 4)$ Máximo relativo.

$y''(3) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow B(3, 0)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

Decreciente (↘): $(1, 3)$

24 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

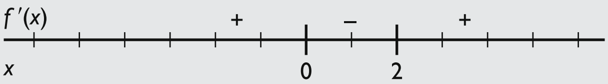
$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(2, -4)$

$y'' = 6x - 6$

$y''(0) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow O(0, 0)$ máximo relativo.

$y''(2) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow A(2, -4)$ mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 2)$

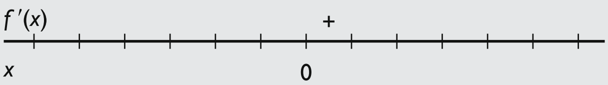
25 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x + 4$

$y' \neq 0 \Rightarrow$ No tiene ni máximos ni mínimos relativos.



Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente (↘): $\varnothing$

26 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Solución:

$y' = x^3 - 3x^2 + 2x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = 2$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow A\left(1, \frac{1}{4}\right)$

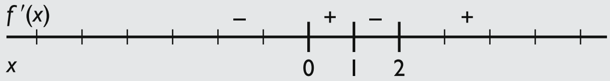
$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$y'' = 3x^2 - 6x + 2$

$y''(0) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow O(0, 0)$ Mínimo relativo.

$y''(1) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow A\left(1, \frac{1}{4}\right)$ Máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(2, 0)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$

27 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

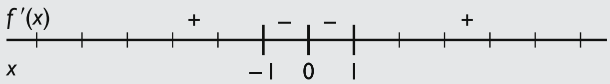
$x = -1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow A(-1, -2)$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow B(1, 2)$

$y'' = \frac{2}{x^3}$

$y''(-1) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(-1, -2)$ Máximo relativo.

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(1, 2)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

28 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Solución:

$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

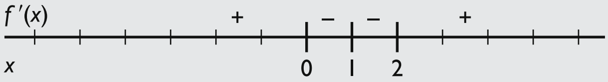
$x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0, -1)$

$x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(2, 3)$

$$y'' = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$y''(0) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, -1)$ Máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(2, 3)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

29 Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

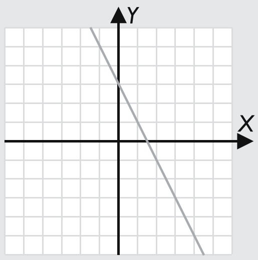
$$y = -2x + 3$$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = -2 < 0 \Rightarrow$ Es siempre decreciente.

La gráfica de la función es una recta de pendiente $m = -2$, que es la derivada.



30 Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

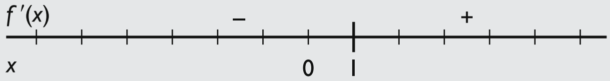
$y' = 2x - 2$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(1, -4)$

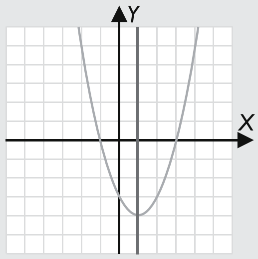
$y'' = 2$

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, -4)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

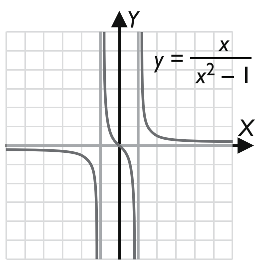


Tiene un mínimo relativo; antes del eje es decreciente, y después, creciente.

5. Puntos de inflexión, curvatura y puntos singulares

Piensa y calcula

Observa la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ y halla visualmente el punto de inflexión y los intervalos donde es convexa (∪), y cóncava (∩)



Solución:

Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Aplica la teoría

31 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Solución:

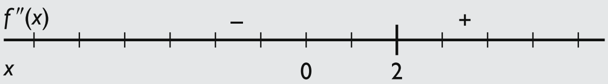
$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$y'' = 6x - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(2, 3)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(2, 3)$



Convexa (∪): $(2, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 2)$

32 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x^2 + 4x$$

Solución:

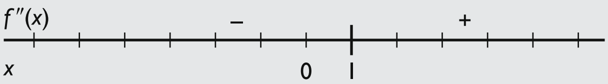
$y' = 3x^2 - 6x + 4$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(1, 2)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(1, 2)$



Convexa (∪): $(1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$

33 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = (x - 1)^3 + 1$$

Solución:

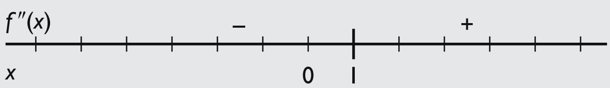
$y' = 3(x - 1)^2$

$y'' = 6(x - 1)$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(1, 1)$



Convexa (∪): $(1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$

34 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 - 6x^2$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 12x$

$y'' = 12x^2 - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow A(-1, -5)$

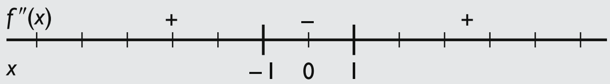
$x = 1 \Rightarrow y = -5 \Rightarrow B(1, -5)$

$y''' = 24x$

$y'''(1) = 24 \neq 0$

$y'''(-1) = -24 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-1, -5)$, $B(1, -5)$



Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-1, 1)$

35 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 + 4x^3 + 2$$

Solución:

$y' = 4x^3 + 12x^2$

$y'' = 12x^2 + 24x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = -2$

$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(0, 2)$

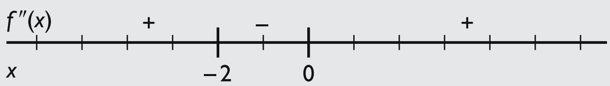
$x = -2 \Rightarrow y = -14 \Rightarrow B(-2, -14)$

$y''' = 24x + 24$

$y'''(0) = 24 \neq 0$

$y'''(-2) = -24 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(0, 2)$, $B(-2, -14)$



Convexa (∪): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-2, 0)$

36 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x - 1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = \frac{2 - x}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2(x - 3)}{x^4}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = \dfrac{2}{9} \Rightarrow A\left(3, \dfrac{2}{9}\right)$

$y''' = \dfrac{6(4 - x)}{x^5}$

$y'''(3) = \dfrac{2}{81} \neq 0$

Punto de inflexión: $A\left(3, \dfrac{2}{9}\right)$

$f''(x)$	$-$		$-$		$+$
x		0		3	

Convexa ($\cup$): $(3, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$

37 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y''' = -\dfrac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$

$y'''(0) = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: $O(0, 0)$

$f''(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$
x		-1		0		1	

Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

38 Calcula los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $y = x^5$ b) $y = x^6$

Solución:

a) $y' = 5x^4$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y'' = 20x^3$

$y''' = 60x^2$

$y^{IV} = 120x$

$y^{V} = 120$

Punto de inflexión en $O(0, 0)$

b) $y' = 6x^5$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y'' = 30x^4$

$y''' = 120x^3$

$y^{IV} = 360x^2$

$y^{V} = 720x$

$y^{VI} = 720$

Mínimo en $O(0, 0)$

Ejercicios y problemas propuestos

Ejercicios propuestos

1. La derivada y la recta tangente

39 Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -3x + 5$ en $[-1, 2]$

b) $f(x) = x^2 - 6x - 4$ en $[1, 3]$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ en $[-1, 3]$

d) $f(x) = \sqrt{x+4}$ en $[-3, 0]$

Solución:

a) $TVM[-1, 2] = \dfrac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = \dfrac{-1-8}{2-(-1)} = \dfrac{-9}{3} = -3$

b) $TVM[1, 3] = \dfrac{f(3) - f(1)}{3-1} = \dfrac{-13-(-9)}{3-1} = \dfrac{-4}{2} = -2$

c) $TVM[-1, 3] = \dfrac{f(3) - f(-1)}{3-(-1)} = \dfrac{0-(-4)}{3-(-1)} = \dfrac{4}{4} = 1$

d) $TVM[-3, 0] = \dfrac{f(0) - f(-3)}{0-(-3)} = \dfrac{2-1}{0-(-3)} = \dfrac{1}{3}$

40 Aplica la definición de derivada y calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 5x - 3$ en $x = -4$

b) $f(x) = -x + 2$ en $x = 3$

c) $f(x) = -x^2 + 5$ en $x = -1$

d) $f(x) = 3x^2 + 5x - 4$ en $x = 1$

Solución:

a) $f'(-4) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-4+h) - f(-4)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5(-4+h) - 3 - [5\cdot(-4) - 3]}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{20} + 5h - \cancel{3} + \cancel{20} + \cancel{3}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{5\cancel{h}}{\cancel{h}} = 5$

b) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(3+h) + 2 - (-3+2)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{3} - h + \cancel{2} + \cancel{3} - \cancel{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$

c) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(-1+h)^2 + 5 - [-(-1)^2 + 5]}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-\cancel{1} + 2h - h^2 + \cancel{5} + \cancel{1} - \cancel{5}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h - h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(2-h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (2-h) = 2$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(1+h)^2 + 5(1+h) - 4 - (3\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 4)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{3} + 6h + 3h^2 + \cancel{5} + 5h - \cancel{4} - \cancel{3} - \cancel{5} + \cancel{4}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3h^2 + 11h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(3h+11)}{\cancel{h}} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} (3h + 11) = 11$

41 Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de la función $f(x) = x^2 + 4x - 1$ en $x = 1$

b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

a) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(1+h)^2 + 4(1+h) - 1 - (1^2 + 4\cdot 1 - 1)}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{1} + 2h + h^2 + \cancel{4} + 4h - \cancel{1} - \cancel{1} - \cancel{4} + \cancel{1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6h + h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}(6+h)}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h\to 0} (6+h) = 6$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 \Rightarrow P(1, 4)$

- Recta tangente:

  $m = f'(1) = 6$

  $y = 6(x - 1) + 4$

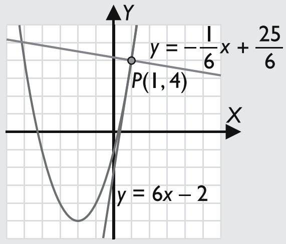
  $y = 6x - 2$

- Recta normal:

  $y = -\dfrac{1}{6}(x - 1) + 4$

  $y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{25}{6}$

c)



42 El número de llamadas que se reciben en una centralita es:

$$f(x) = 4x - \frac{x^2}{2}$$

donde x se expresa en horas, y $f(x)$, en miles de llamadas.

Calcula el número medio de llamadas que se reciben entre las 2 y las 4 horas; y entre las 4 y las 6 horas. ¿Cómo interpretas los resultados?

Solución:

a) $TVM[2, 4] = \dfrac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \dfrac{8 - 6}{4 - 2} = \dfrac{2}{2} = 1$

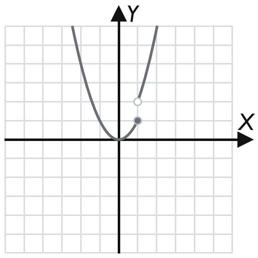
b) $TVM[4, 6] = \dfrac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \dfrac{6 - 8}{6 - 4} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Entre 2 y 4 la función es creciente y entre 4 y 6 es decreciente. Debe presentar un máximo en $x = 4$

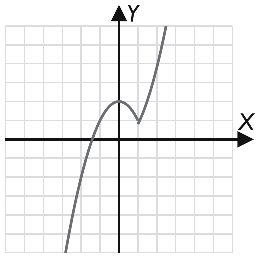
2. Continuidad y derivabilidad

43 Analiza si las funciones representadas admiten derivada en $x = 1$

a)



b)



Solución:

a) No, porque es discontinua.

b) No, porque se pueden dibujar dos rectas tangentes de pendientes distintas en $x = 1$

44 Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x + 2}$

Solución:

a) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2(x + h)^2 - 4(x + h) + 3 - (2x^2 - 4x + 3)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 4x - 4h + 3 - 2x^2 + 4x - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2x^2} + 4xh + 2h^2 - \cancel{4x} - 4h + \cancel{3} - \cancel{2x^2} + \cancel{4x} - \cancel{3}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x\cancel{h} + 2h^{\cancel{2}} - 4\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (4x + 2h - 4) = 4x - 4$$

b) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{x + h + 2} - \dfrac{3}{x + 2}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\cancel{3x} + \cancel{6} - \cancel{3x} - 3h - \cancel{6}}{(x + h + 2)(x + 2)}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3\cancel{h}}{(x + h + 2)(x + 2)\cancel{h}} = -\frac{3}{(x + 2)^2}$$

45 Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de $f(x) = \sqrt{x}$

Calcula:

a) El valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 2$

b) El valor de la abscisa en el que la derivada vale $1/4$

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x + h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x + h} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a) $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

b) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow 2\sqrt{x} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

3. Tabla de derivadas y regla de la cadena

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

46 a) $y = 3x^2 + x - 7$ b) $y = -x^4 + x^2 - 6x$

Solución:

a) $y' = 6x + 1$ b) $y' = -4x^3 + 2x - 6$

47 a) $y = 2x^3 + x^2 - 5$ b) $y = 3x^4 + 5x + 1$

Solución:

a) $y' = 6x^2 + 2x$ b) $y' = 12x^3 + 5$

48 a) $y = (x^3 - 1)^2$ b) $y = (x^3 + 1)^4$

Solución:

a) $y' = 6x^2(x^3 - 1)$ b) $y' = 12x^2(x^3 + 1)^3$

49 a) $y = (2x^3 + x^2)^3$ b) $y = (2x^4 - 1)^5$

Solución:

a) $y' = 3(6x^2 + 2x)(2x^3 + x^2)^2$ b) $y' = 40x^3(2x^4 - 1)^4$

50 a) $y = \sqrt{3x^2 - 2}$ b) $y = \sqrt{x^3 - x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2 - 2}}$ b) $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x}}$

51 a) $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$ b) $y = \sqrt[3]{x^2 + 4x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{5\sqrt[5]{(x^3 - x)^4}}$ b) $y' = \dfrac{2x + 4}{3\sqrt[3]{(x^2 + 4x)^2}}$

52 a) $y = e^{2x^3}$ b) $y = e^{7x}$

Solución:

a) $y' = 6x^2e^{2x^3}$ b) $y' = 7e^{7x}$

53 a) $y = 7^{2x+3}$ b) $y = e^{-x^2+2}$

Solución:

a) $y' = 2 \cdot 7^{2x+3} \cdot \ln 7$ b) $y' = -2x\, e^{-x^2+2}$

54 a) $y = \ln (5x^3 - 3x)$ b) $y = \ln (x^4 - x^2)$

Solución:

a) $y' = \dfrac{15x^2 - 3}{5x^3 - 3x}$ b) $y' = \dfrac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2} = \dfrac{4x^2 - 2}{x^3 - x}$

55 a) $y = \log (2x^3 + 5)$ b) $y = \log (x^2 + 4x + 1)$

Solución:

a) $y' = \dfrac{6x^2}{2x^3 + 5} \log e$ b) $y' = \dfrac{2x + 4}{x^2 + 4x + 1} \log e$

56 a) $y = \operatorname{sen} (3x^2 - 4x)$ b) $y = \cos (4x^3 + x)$

Solución:

a) $y' = (6x - 4) \cos (3x^2 - 4x)$

b) $y' = -(12x^2 + 1) \operatorname{sen} (4x^3 + x)$

57 a) $y = \operatorname{sen} (x^3 + 2)$ b) $y = \operatorname{tg} (x^2 - 1)$

Solución:

a) $y' = 3x^2 \cos (x^3 + 2)$ b) $y' = 2x \sec^2 (x^2 - 1)$

58 a) $y = e^x + \cos x$ b) $y = x\, e^x$

Solución:

a) $y' = e^x - \operatorname{sen} x$ b) $y' = (x + 1)e^x$

59 a) $y = \dfrac{2x + 3}{x^2 - 2}$ b) $y = \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{-2x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 2)^2}$

b) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \operatorname{sen} x - \ln x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen} x - x \ln x \cos x}{x \operatorname{sen}^2 x}$

60 Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^4 + 2x^2$ b) $y = \dfrac{x^3}{6} - 2x$

c) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ d) $y = \dfrac{x^2 + 4}{2x}$

Solución:

a) $y' = -4x^3 + 4x$
$y'' = -12x^2 + 4$
$y''' = -24x$

b) $y' = \dfrac{x^2}{2} - 2$
$y'' = x$
$y''' = 1$

c) $y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$
$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$
$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

d) $y' = \dfrac{x^2 - 4}{2x^2}$
$y'' = \dfrac{4}{x^3}$
$y''' = -\dfrac{12}{x^4}$

61 Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = -x^3 + 3x$ b) $y = x^4 - 4x^2$

c) $y = \dfrac{6}{x^2 + 3}$ d) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{1 - x}$

Solución:

a) $y' = -3x^2 + 3$
$y'' = -6x$
$y''' = -6$

b) $y' = 4x^3 - 8x$
$y'' = 12x^2 - 8$
$y''' = 24x$

c) $y' = -\dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$
$y'' = \dfrac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$
$y''' = \dfrac{144x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$

d) $y' = \dfrac{-x^2 + 2x - 3}{(x - 1)^2}$
$y'' = \dfrac{4}{(x - 1)^3}$
$y''' = -\dfrac{12}{(x - 1)^4}$

4. Extremos relativos y crecimiento

62 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 3x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 3$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1, 2)$

$x = 1 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(1, -2)$

$y'' = 6x$

$y''(-1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow A(-1, 2)$ Máximo relativo.

$y''(1) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow B(1, -2)$ Mínimo relativo.

$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
x		-1	0	1	

Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 1)$

63 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x$$

Solución:

$y' = x^2 - 4$

$y' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$

$x = -2 \Rightarrow y = \dfrac{16}{3} \Rightarrow A\left(-2, \dfrac{16}{3}\right)$

$x = 2 \Rightarrow y = -\dfrac{16}{3} \Rightarrow B\left(2, -\dfrac{16}{3}\right)$

$y'' = 2x$

$y''(-2) = -4 < 0\ (-) \Rightarrow A\left(-2, \dfrac{16}{3}\right)$ Máximo relativo.

$y''(2) = 4 > 0\ (+) \Rightarrow B\left(2, -\dfrac{16}{3}\right)$ Mínimo relativo.

$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
x		-2	0	2	

Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-2, 2)$

64 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = 2x^3 - 6x + 1$$

Solución:

$y' = 6x^2 - 6$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(-1, 5)$

$x = 1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(1, -3)$

$y'' = 12x$

$y''(-1) = -12 < 0\ (-) \Rightarrow A(-1, 5)$ Máximo relativo.

$y''(1) = 12 > 0\ (+) \Rightarrow B(1, -3)$ Mínimo relativo.

$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
x		-1	0	1	

Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 1)$

65 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = -x^3 + 6x^2 + 15x - 1$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 12x + 15$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 5$

$x = -1 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow A(-1, -9)$

$x = 5 \Rightarrow y = 99 \Rightarrow B(5, 99)$

$y'' = -6x + 12$

$y''(-1) = 18 > 0\ (+) \Rightarrow A(-1, -9)$ Mínimo relativo.

$y''(5) = -18 < 0\ (-) \Rightarrow B(5, 99)$ Máximo relativo.

$f'(x)$	$-$			$+$		$-$
x		-1	0		5	

Creciente (↗): $(-1, 5)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

66 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(-1, -1)$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(1, 1)$

$y'' = \dfrac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(-1) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow A(-1, -1)$ Mínimo relativo.

$y''(1) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow B(1, 1)$ Máximo relativo.

$f'(x)$	$-$		$+$		$-$
x		-1	0	1	

Creciente (↗): $(-1, 1)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

67 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución:

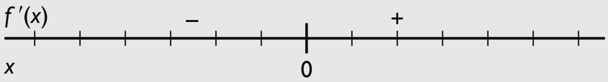
$y' = \dfrac{6x}{(x^2 + 3)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$$y'' = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2 + 3)^3}$$

$y''(0) = \dfrac{2}{3} > 0\ (+) \Rightarrow O(0, 0)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

68 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$

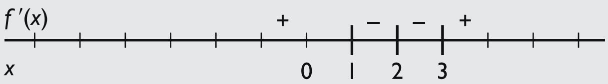
$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

$x = 3 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(3, 4)$

$$y'' = \frac{2}{(x - 2)^3}$$

$y''(1) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 0)$ Máximo relativo.

$y''(3) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(3, 4)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$

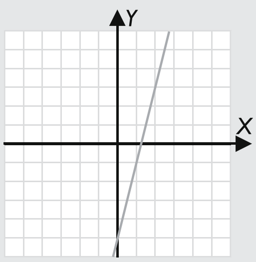
Decreciente (↘): $(1, 2) \cup (2, 3)$

69 Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta $y = 4x - 5$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = 4 > 0 \Rightarrow$ La función es siempre creciente.



Es una recta de pendiente 4, que es el valor de la derivada.

70 Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -2x^2 - 8x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

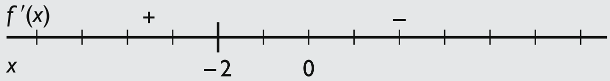
$y' = -4x - 8$

$y' = 0 \Rightarrow x = -2$

$x = -2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(-2, 5)$

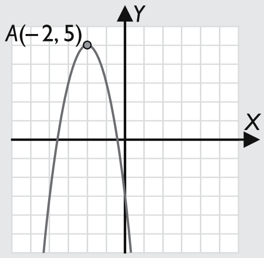
$y'' = -4$

$y''(-2) = -4 < 0\ (-) \Rightarrow A(-2, 5)$ Máximo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, -2)$

Decreciente (↘): $(-2, +\infty)$



Es una parábola con eje de simetría en $x = -2$ y con el vértice en $A(-2, 5)$

5. Puntos de inflexión, curvatura y puntos singulares

71 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^3 - 3x + 4$$

Solución:

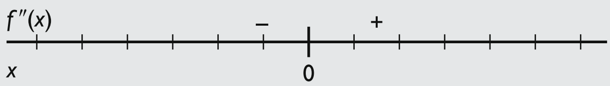
$y' = 3x^2 - 3$

$y'' = 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

$y''' = 6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(0, 4)$



Convexa (∪): $(0, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$

72 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = -x^3 + 3x^2 + 1$$

Solución:

$y' = -3x^2 + 6x$

$y'' = -6x + 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(1, 3)$

$y''' = -6 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(1, 3)$

$f''(x)$	+		−
x		0 1	

Convexa (∪): $(-\infty, 1)$

Cóncava (∩): $(1, +\infty)$

73 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 2x^3 - 3x + 4$$

Solución:

$y' = 6x^2 - 3$

$y'' = 12x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

$y''' = 12 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(0, 4)$

$f''(x)$	−		+
x		0	

Convexa (∪): $(0, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$

74 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = 4x^3 - 3x^4$$

Solución:

$y' = 12x^2 - 12x^3$

$y'' = 24x - 36x^2$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = \dfrac{2}{3}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow y = \dfrac{16}{27} \Rightarrow B\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$

$y''' = 24 - 72x$

$y'''(0) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $O(0, 0)$

$y'''\left(\dfrac{2}{3}\right) = -24 \neq 0$

Punto de inflexión: $A\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{16}{27}\right)$

$f''(x)$	−		+		−
x		0		2/3	

Convexa (∪): $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$

75 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x^4 - 6x^2 - 6x + 1$$

Solución:

$y' = 4x^3 - 12x - 6$

$y'' = 12x^2 - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(-1, 2)$

$x = 1 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow B(1, -10)$

$y''' = 24x$

$y'''(-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $A(-1, 2)$

$y'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $B(1, -10)$

$f''(x)$	+		−		+
x		−1	0	1	

Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-1, 1)$

76 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Solución:

$y' = -\dfrac{12x}{(x^2 + 3)^2}$

$y'' = \dfrac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$x = -1 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow A\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$

$x = 1 \Rightarrow y = \dfrac{3}{2} \Rightarrow B\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

$y''' = \dfrac{144x(3 - x^2)}{(x^2 + 3)^4}$

$y'''(-1) = -\dfrac{9}{8} \neq 0$

Punto de inflexión: $A\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$

$y'''(1) = \dfrac{9}{8} \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $B\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

$f''(x)$	+		−		+
x		−1	0	1	

Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-1, 1)$

77 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

Solución:

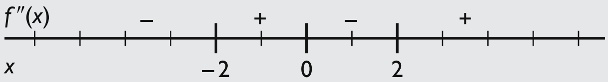
$y' = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$

$y'' = \frac{2x^3 + 24x}{(x^2 - 4)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y''' = -\frac{6(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4}$

$y'''(0) = -\frac{3}{8} \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $O(0, 3)$



Convexa ($\cup$): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

78 Calcula los puntos críticos de la función: $y = x^5 + 3$

Solución:

$y' = 5x^4$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, 3)$

$y'' = 20x^3$

$y''(0) = 0$

$y''' = 60x^2$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 120x$

$y^{IV}(0) = 0$

$y^{V} = 120 \neq 0 \Rightarrow O(0, 3)$ Punto de inflexión.

79 Calcula los puntos críticos de la función: $y = x^6 - 2$

Solución:

$y' = 6x^5$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow O(0, -2)$

$y'' = 30x^4$

$y''(0) = 0$

$y''' = 120x^3$

$y'''(0) = 0$

$y^{IV} = 360x$

$y^{IV}(0) = 0$

$y^{V} = 720x$

$y^{V}(0) = 0$

$y^{VI} = 720x$

$y^{VI} = 720 > 0\ (+) \Rightarrow O(0, -2)$ Mínimo relativo.

Para ampliar

80 Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = -x + 1$ en $[-1, 2]$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 2$ en $[2, 4]$

Solución:

a) $TVM[-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{-1 - 2}{2 - (-1)} = \frac{-3}{3} = -1$

b) $TVM[2, 4] = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{-2 - 2}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$

81 Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica:

a) $f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$ en $[3, 5]$

b) $f(x) = \sqrt{x + 6}$ en $[-2, 3]$

Solución:

a) $TVM[3, 5] = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{2 - 4}{5 - 3} = \frac{-2}{2} = -1$

b) $TVM[-2, 3] = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{3 - 2}{3 - (-2)} = \frac{1}{5}$

82 Aplica la definición de derivada y calcula:

a) La derivada de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en $x = 1$

b) Las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de abscisa $x = 1$

c) Representa la función $f(x)$ y las rectas.

Solución:

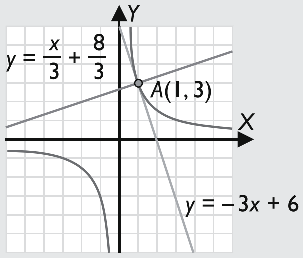
a) $f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{3}{1 + h} - \frac{3}{1}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{\cancel{3} - \cancel{3} - 3h}{1 + h}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-3\cancel{h}}{(1 + h)\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-3}{1 + h} = -3$

b) Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow P(1, 3)$

- Recta tangente:
  $m = f'(1) = -3$
  $y = -3(x - 1) + 3$
  $y = -3x + 6$
- Recta normal:
  $y = \frac{1}{3}(x - 1) + 3$
  $y = \frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

c)

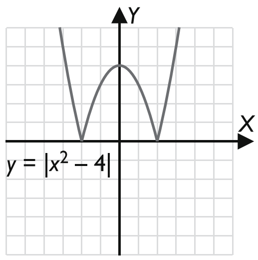


83 El espacio que recorre una motocicleta viene dado por $f(t) = t^2 + t$, donde t se expresa en segundos, y $f(t)$, en metros. Calcula la velocidad media en las dos primeras horas de movimiento.

Solución:

$$TVM[0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{6 - 0}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m/s}$$

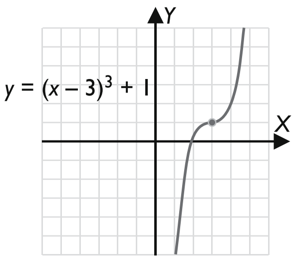
84 Analiza en qué puntos la función del gráfico no es derivable.



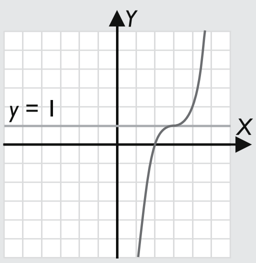
Solución:

En $x = -2$ y en $x = 2$ la gráfica de la función tiene picos, y se pueden dibujar, en cada uno de ellos, dos rectas tangentes con distinta pendiente. Es decir, la función no es derivable.

85 Analiza si en $x = 3$ la función del gráfico es derivable. Dibuja la recta tangente en dicho punto.



Solución:



La función es derivable en $x = 3$. La tangente en dicho punto es la recta $y = 1$

86 Aplicando la definición de derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

Solución:

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x^3}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3x^2 + 3xh + h^2)\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2}{x + h - 1} - \dfrac{2}{x - 1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{\cancel{2x} - \cancel{2} - \cancel{2x} - 2h + \cancel{2}}{(x + h - 1)(x - 1)}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2\cancel{h}}{(x + h - 1)(x - 1)\cancel{h}} = -\dfrac{2}{(x - 1)^2}$

87 Aplicando la definición de derivada, halla la función derivada de:

$$f(x) = \frac{3}{x - 2}$$

Calcula:

a) El valor de la derivada en el punto de abscisa $x = 3$

b) El valor de la abscisa en el que la derivada es $-1/3$

Solución:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{3}{x + h - 2} - \dfrac{3}{x - 2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{\cancel{3x} - \cancel{6} - \cancel{3x} - 3h + \cancel{6}}{(x + h - 2)(x - 2)}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3\cancel{h}}{(x + h - 2)(x - 2)\cancel{h}} = -\dfrac{3}{(x - 2)^2}$

a) $f'(3) = -3$

b) $-\dfrac{3}{(x - 2)^2} = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow x = -1, x = 5$

Calcula la función derivada aplicando las reglas de derivación:

88 a) $y = (x^2 + 4)^3$ b) $y = (x^3 + 4)^2 \operatorname{sen} x$

Solución:

a) $y' = 6x(x^2 + 4)^2$

b) $y' = 6x^2(x^3 + 4) \operatorname{sen} x + (x^3 + 4)^2 \cos x$

89 a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{5}{x}$ b) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{5}{x^2}$ b) $y' = \dfrac{-2x^2 - 2x - 4}{(x^2 - 2)^2}$

90 a) $y = \dfrac{e^x}{\text{sen } x}$ b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{e^x \text{ sen } x - e^x \cos x}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{e^x(\text{sen } x - \cos x)}{\text{sen}^2 x}$

b) $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

91 a) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y = \sqrt{\ln(3x - 5)}$

Solución:

a) $y' = -\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$ b) $y' = \dfrac{3}{2(3x-5)\sqrt{\ln(3x-5)}}$

92 a) $y = e^{\text{sen } x}$ b) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Solución:

a) $y' = \cos x \, e^{\text{sen } x}$ $y' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

93 a) $y = e^{\sqrt{x+2}}$ b) $y = e^x \ln x$

Solución:

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} e^{\sqrt{x+2}}$ b) $y' = e^x\left(\ln x + \dfrac{1}{x}\right)$

94 a) $y = e^{2x} \cos x$ b) $y = 2x + 3e^{-(x+2)}$

Solución:

a) $y' = e^{2x}(2\cos x - \text{sen } x)$

b) $y' = 2 - 3e^{-(x+2)}$

95 a) $y = \ln \text{tg } x$ b) $y = \ln 5x + e^{\sqrt{x}}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{\sec^2 x}{\text{tg } x} = \dfrac{1}{\text{sen } x \cos x} = \sec x \text{ cosec } x$

b) $y' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

96 a) $y = \text{tg } \sqrt{3x+2}$ b) $y = \text{sen } \sqrt{2x}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+2}} \sec^2 \sqrt{3x+2}$ b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} \cos \sqrt{2x}$

97 a) $y = \cos^2 x$ b) $y = \text{tg}^2 x + 2^{\text{sen } x}$

Solución:

a) $y' = -2\cos x \text{ sen } x$

b) $y' = 2 \text{ tg } x \sec^2 x + \cos x \, 2^{\text{sen } x} \ln 2$

98 a) $y = \dfrac{2x+1}{\cos x}$ b) $y = x \text{ sen } x$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2\cos x + (2x+1)\text{ sen } x}{\cos^2 x}$

b) $y' = \text{sen } x + x \cos x$

99 Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$

c) $y = \dfrac{4}{x^2 - 1}$ d) $y = \dfrac{2x - 1}{x^2}$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 12x + 12$
$y'' = 6x - 12$
$y''' = 6$

b) $y' = -3x^2 + 6x - 4$
$y'' = -6x + 6$
$y''' = -6$

c) $y' = -\dfrac{8x}{(x^2-1)^2}$
$y'' = \dfrac{24x^2 + 8}{(x^2-1)^3}$
$y''' = \dfrac{-96x^3 - 96x}{(x^2-1)^4}$

d) $y' = \dfrac{2 - 2x}{x^3}$
$y'' = \dfrac{4x - 6}{x^4}$
$y''' = \dfrac{-12x + 24}{x^5}$

100 Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones y simplifica los resultados.

a) $y = x^4 + 2x^2$ b) $y = x^4 - x^3$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$ d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Solución:

a) $y' = 4x^3 + 4x$
$y'' = 12x^2 + 4$
$y''' = 24x$

b) $y' = 4x^3 - 3x^2$
$y'' = 12x^2 - 6x$
$y''' = 24x - 6$

c) $y' = \dfrac{6x}{(x^2+3)^2}$
$y'' = \dfrac{-18x^2 + 18}{(x^2+3)^3}$
$y''' = \dfrac{72x^3 - 216x}{(x^2+3)^4}$

d) $y' = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$
$y'' = \dfrac{-12x^2 + 4}{(x^2+1)^3}$
$y''' = \dfrac{48x^3 - 48x}{(x^2+1)^4}$

101 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x^3 - 2x^2 + x$$

Solución:

$y' = 3x^2 - 4x + 1$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1, x = \dfrac{1}{3}$

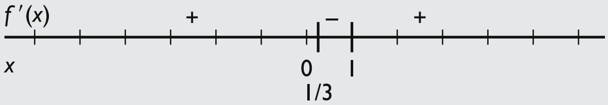
$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

$x = \dfrac{1}{3} \Rightarrow y = \dfrac{4}{27} \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$

$y'' = 6x - 4$

$y''(1) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow A(1, 0)$ Mínimo relativo.

$y''\left(\dfrac{1}{3}\right) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow B\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$ Máximo relativo.



Creciente (↗): $\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $\left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$

102 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{4}{x^2 - 2x + 5}$$

Solución:

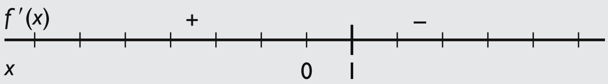
$y' = \dfrac{-8x + 8}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1, 1)$

$y'' = \dfrac{8(3x^2 - 6x - 1)}{(x^2 - 2x + 5)^3}$

$y''(1) = -\dfrac{1}{2} < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 1)$ Máximo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 1)$

Decreciente (↘): $(1, +\infty)$

103 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

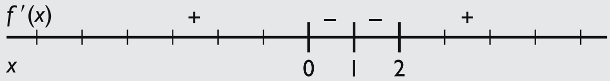
$x = 0 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(0, -4)$

$x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$y'' = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

$y''(0) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, -4)$ Máximo relativo.

$y''(2) = 2 > 0\ (+) \Rightarrow B(2, 0)$ Mínimo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

104 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = \frac{5}{x^2 + 1}$$

Solución:

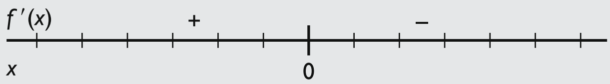
$y' = -\dfrac{10x}{(x^2 + 1)^2}$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(0, 5)$

$y'' = \dfrac{30x^2 - 10}{(x^2 + 1)^3}$

$y''(0) = -10 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, 5)$ Máximo relativo.



Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

105 Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

$$y = -\frac{x}{2} + 3$$

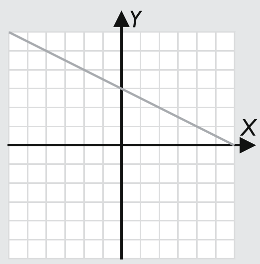
Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = -\dfrac{1}{2} < 0$

La derivada es menor que cero para todo valor de x; luego la función es siempre decreciente.

La gráfica de la función es una recta de pendiente $-1/2$, que es su derivada.



106 Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = \frac{x^2}{2} - x - 3$

Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

Solución:

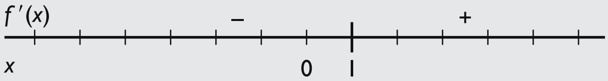
$y' = x - 1$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = -\frac{7}{2} \Rightarrow A\left(1, -\frac{7}{2}\right)$

$y'' = 1$

$y''(1) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow A\left(1, -\frac{7}{2}\right)$ Mínimo relativo.

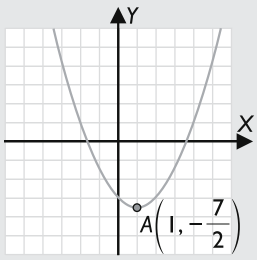


Creciente (↗): $(1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

El vértice de la parábola coincide con el mínimo calculado.

Antes del vértice, la parábola es decreciente, y después, creciente.



107 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ b) $y = x^4 - 6x^2 + 5x$

Solución:

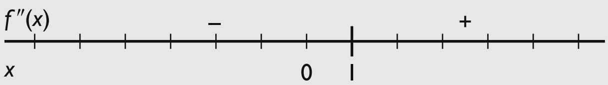
a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

$y''' = 6$

$y'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $A(1, 0)$



Convexa (∪): $(1, +\infty)$; cóncava (∩): $(-\infty, 1)$

b) $y' = 4x^3 - 12x + 5$

$y'' = 12x^2 - 12$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

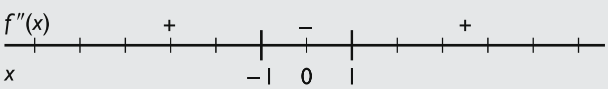
$x = -1 \Rightarrow y = -10 \Rightarrow A(-1, -10)$

$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(1, 0)$

$y''' = 24x$

$y'''(-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $A(-1, -10)$

$y'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $B(1, 0)$



Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-1, 1)$

108 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$ b) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

Solución:

a) $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

$x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$x = \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

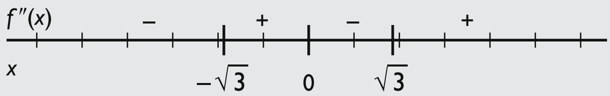
$y''' = \frac{-12x^4 + 72x^2 - 12}{(x^2 + 1)^4}$

$y'''(-\sqrt{3}) = \frac{3}{8} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Punto de inflexión: $A\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$y'''(0) = -12 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $O(0, 0)$

$y'''(\sqrt{3}) = \frac{3}{8} \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $B\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



Convexa (∪): $\left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$

Cóncava (∩): $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$

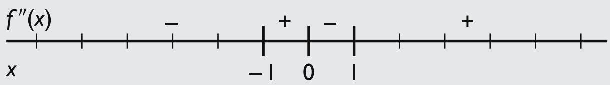
b) $y' = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow O(0, 0)$

$y''' = \frac{-12x^4 + 72x^2 - 12}{(x^2 + 1)^4}$

$y'''(0) = -12 \neq 0 \Rightarrow$ Punto de inflexión: $O(0, 0)$



Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Problemas propuestos

109 Aplicando la definición de derivada, calcula la ecuación de la recta tangente a la curva:

$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

en el punto de abscisa $x = -2$

Solución:

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{-2+h+3} - \frac{1}{-2+3}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\cancel{1} - \cancel{1} - h}{1+h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{(1+h)\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

Si $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 1 \Rightarrow P(-2, 1)$

$m = f'(-2) = -1$

$y = -(x + 2) + 1$

$y = -x - 1$

110 Halla los puntos en los que la función derivada de las siguientes funciones es igual a cero:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ b) $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

Solución:

a) $y' = 6x^2 + 6x - 12$

$6x^2 + 6x - 12 = 0$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -2$

$x = 1 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow P(1, -7)$

$x = -2 \Rightarrow y = 20 \Rightarrow P(-2, 20)$

b) $y' = 3x^2 - 6x + 3$

$3x^2 - 6x + 3 = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow P(1, 3)$

111 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 4x + 5$ en el punto de abscisa $x = 3$

Solución:

$x = 3 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(3, 2)$

$y' = 2x - 4$

- Recta tangente:

$m = y'(3) = 2$

$y = 2(x - 3) + 2$

$y = 2x - 4$

- Recta normal:

$y = -\frac{1}{2}(x - 3) + 2$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

112 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^3 - 5x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$

Solución:

$x = -2 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow P(-2, 6)$

$y' = 3x^2 - 5$

- Recta tangente:

$m = y'(-2) = 7$

$y = 7(x + 2) + 6$

$y = 7x + 20$

- Recta normal:

$y = -\frac{1}{7}(x + 2) + 6$

$y = -\frac{1}{7}x + \frac{40}{7}$

113 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:

$$y = \frac{1}{x}$$

en el punto de abscisa $x = 1$

Solución:

$x = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P(1, 1)$

$y' = -\frac{1}{x^2}$

- Recta tangente:

$m = y'(1) = -1$

$y = -1(x - 1) + 1$

$y = -x + 2$

- Recta normal:

$y = (x - 1) + 1$

$y = x$

114 Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^4 + 1$ cuya pendiente sea 4

Solución:

$y' = 4x^3$

$4x^3 = 4 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(1, 2)$

$m = 4$

$y = 4(x - 1) + 2$

$y = 4x - 2$

115 Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 9x + 1$ cuya pendiente sea 3. ¿Cuántas soluciones hay?

Solución:

$y' = 3x^2 - 9$

$3x^2 - 9 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, x = -2$

a) $x = 2 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow P(2, -9)$

$m = 3$

$y = 3(x - 2) - 9$

$y = 3x - 15$

b) $x = -2 \Rightarrow y = 11 \Rightarrow P(-2, 11)$

$m = 3$

$y = 3(x + 2) + 11$

$y = 3x + 17$

Hay dos soluciones.

116 Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = -x^3 + 26x$ que sean paralelas a la recta $y = -x$

Solución:

La recta tiene de pendiente:

$y' = -1, m = -1$

$y' = -3x^2 + 26$

$-3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3, x = -3$

a) $x = 3 \Rightarrow y = 51 \Rightarrow P(3, 51)$

$m = -1$

$y = -1(x - 3) + 51$

$y = -x + 54$

b) $x = -3 \Rightarrow y = -51 \Rightarrow P(-3, -51)$

$m = -1$

$y = -1(x + 3) - 51$

$y = -x - 54$

117 Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - x^2$ que tengan una pendiente de 45°

Solución:

$m = \operatorname{tg} 45° = 1$

$y' = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = 1 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -\dfrac{1}{3}$

a) $x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow P(1, 0)$

$m = 1$

$y = x - 1$

b) $x = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{4}{27} \Rightarrow P\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{27}\right)$

$m = 1$

$y = x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{27}$

$y = x + \dfrac{5}{27}$

118 Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^2 - 4$ en los puntos de corte con el eje X

Solución:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

$y' = 2x$

a) $P(2, 0)$

$m = y'(2) = 4$

$y = 4(x - 2)$

$y = 4x - 8$

b) $P(-2, 0)$

$m = y'(-2) = -4$

$y = -4(x + 2)$

$y = -4x - 8$

119 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función: $y = \operatorname{sen} x$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π, solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$y' = \cos x$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3\pi}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$

$x = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$

$y'' = -\operatorname{sen} x$

$y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow A\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ Máximo relativo.

$y''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow B\left(\dfrac{3\pi}{2}, -1\right)$ Mínimo relativo.

$f'(x)$		+		–		+	
x	0		$\pi/2$	π	$3\pi/2$		2π

Creciente (↗): $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Decreciente (↘): $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

120 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función: $y = \cos x$

Solución:

Como es una función periódica de período 2π, solo se estudia en el primer período positivo $[0, 2\pi]$

$y' = -\operatorname{sen} x$

$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pi$

$x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0, 1)$

$x = \pi \Rightarrow y = -1 \Rightarrow B(\pi, -1)$

$y'' = -\cos x$

$y''(0) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow A(0, 1)$ Máximo relativo.

$y''(\pi) = 1 > 0\ (+) \Rightarrow B(\pi, -1)$ Mínimo relativo.

$f'(x)$		–		+	
x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

Creciente (↗): $(\pi, 2\pi)$

Decreciente (↘): $(0, \pi)$

121 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x - \text{sen}\, x$$

Solución:

$y' = 1 - \cos x$

$1 - \cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

$y'' = \text{sen}\, x$

$y''(0) = 0$

$y''' = \cos x$

$y'''(0) = 1 \neq 0$

$A(0, 0)$ es un punto de inflexión y lo mismo sucede con todos los $x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $y' = 1 - \cos x$, se tiene que y' nunca puede ser negativa; por tanto, es siempre creciente.

Creciente ($\nearrow$): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $\varnothing$

122 Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la función:

$$y = x + \cos x$$

Solución:

$y' = 1 - \text{sen}\, x$

$1 - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$y'' = -\cos x$

$y''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$y''' = \text{sen}\, x$

$y'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$

$A\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ es un punto de inflexión, y lo mismo sucede con todos los $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Como $y' = 1 - \text{sen}\, x$, se tiene que y' nunca puede ser negativa; por tanto, es siempre creciente.

Creciente ($\nearrow$): $= \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $= \varnothing$

123 Aplicando el cálculo de derivadas, estudia la monotonía de la recta:

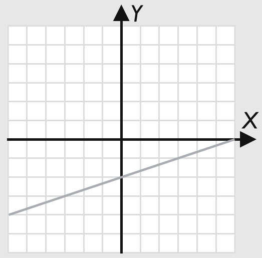
$$y = \frac{x}{3} - 2$$

Haz la representación gráfica de la recta e interpreta el resultado.

Solución:

$y' = 1/3 > 0 \Rightarrow$ La función es siempre creciente.

La gráfica de la función es una recta de pendiente $m = 1/3$, que es la derivada.



124 Aplicando el cálculo de derivadas, calcula los máximos y mínimos relativos y determina la monotonía de la parábola $y = -3x^2 + 6x + 2$. Haz la representación gráfica de la parábola e interpreta el resultado.

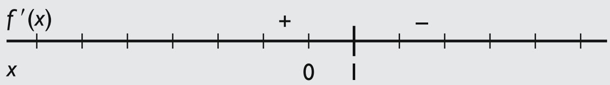
Solución:

$y' = -6x + 6$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$

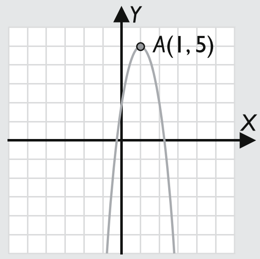
$x = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A(1, 5)$

$y'' = -6 < 0\ (-) \Rightarrow A(1, 5)$ Máximo relativo.



Creciente ($\nearrow$): $(-\infty, 1)$

Decreciente ($\searrow$): $(1, +\infty)$



Tiene un máximo relativo, antes del eje es creciente, y después, decreciente.

125 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \text{sen}\, x$

Solución:

Como es una función periódica de periodo 2π, solo se estudia en el primer periodo positivo $[0, 2\pi]$

$y' = \cos x$

$y'' = -\text{sen}\, x$

$-\text{sen}\, x = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pi$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

$x = \pi \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B(\pi, 0)$

$y''' = -\cos x$

$y'''(0) = -1 \neq 0 \Rightarrow A(0, 0)$ Punto de inflexión.

$y'''(\pi) = 1 \neq 0 \Rightarrow B(\pi, 0)$ Punto de inflexión.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f''(x)$		$-$		$+$	

Convexa ($\cup$): $(\pi, 2\pi)$

Cóncava ($\cap$): $(0, \pi)$

126 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = \cos x$

Solución:

Como es una función periódica de periodo 2π, solo se estudia en el primer periodo positivo $[0, 2\pi]$

$y' = -\operatorname{sen} x$

$y'' = -\cos x$

$-\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3\pi}{2}$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$

$x = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow B\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$

$y''' = \operatorname{sen} x$

$y'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0 \Rightarrow A\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ Punto de inflexión.

$y'''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \neq 0 \Rightarrow B\left(\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ Punto de inflexión.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f''(x)$	$-$		$+$		$-$

Convexa ($\cup$): $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

Cóncava ($\cap$): $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

127 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función: $y = x + \operatorname{sen} x$

Solución:

$y' = 1 + \cos x$

$y'' = -\operatorname{sen} x$

$-\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

$y''' = -\cos x$

$y'''(0) = -1 \neq 0$

$A(0, 0)$ es un punto de inflexión y lo mismo sucede con todos los $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f''(x)$		$-$		$+$	

Convexa ($\cup$): $(\pi, 2\pi)$

Cóncava ($\cap$): $(0, \pi)$

La convexidad es periódica de periodo 2π

128 Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función:

$$y = x - \cos x$$

Solución:

$y' = 1 + \operatorname{sen} x$

$y'' = \cos x$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow y = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow A\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$y''' = -\operatorname{sen} x$

$y'''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$

$A(\pi/2, \pi/2)$ es un punto de inflexión, y lo mismo sucede con todos los $x = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$f''(x)$	$+$		$-$		$+$

Convexa ($\cup$): $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

Cóncava ($\cap$): $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$

La convexidad es periódica de periodo 2π

Para profundizar

129 Calcula la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva $y = x^2 + 6x + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$. Haz la representación gráfica.

Solución:

$x = -2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow P(-2, -4)$

$y' = 2x + 6$

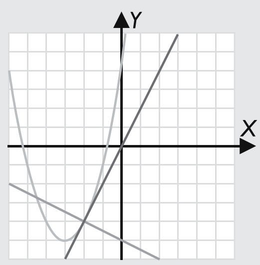
$m = y'(-2) = 2$

Recta tangente:

$y = 2(x + 2) - 4 \Rightarrow y = 2x$

Recta normal:

$y = -\dfrac{1}{2}(x + 2) - 4 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}x - 5$



130 La ecuación de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$ es: $y - 4x + 11 = 0$. Calcula cuánto valen $f(3)$ y $f'(3)$

Solución:

La recta tangente es:

$y = 4x - 11$

$f(3) = 4 \cdot 3 - 11 = 1$

$f'(3) = 4$

131 Halla los puntos en los que las rectas tangentes a las curvas $y = x^2 + 3x - 2$ e $y = 2x^2 + x - 3$ son paralelas.

Solución:

$y' = 2x + 3$

$y' = 4x + 1$

$2x + 3 = 4x + 1 \Rightarrow x = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow A(1, 2)$ en la primera parábola.

$x = 1 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$ en la segunda parábola.

132 Demuestra que la función $y = \ln x$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

Solución:

$y' = \dfrac{1}{x}$

$\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$y' > 0$ en todos los puntos del dominio; por tanto, es creciente siempre.

133 Determina los máximos, los mínimos relativos y la monotonía de la función

$$y = x^2 - 8 \ln x$$

Solución:

$y' = 2x - \dfrac{8}{x}$

$2x - \dfrac{8}{x} = 0 \Rightarrow x = 2, x = -2$

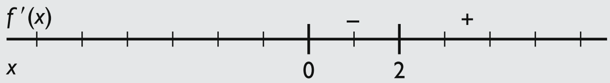
$x = -2$ no se estudia, por no estar en el dominio.

$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 8 \ln 2 \Rightarrow A(2, 4 - 8 \ln 2)$

$y'' = 2 + \dfrac{8}{x^2}$

$y''(2) = 4 > 0\ (+) \Rightarrow A(2, 4 - 8 \ln 2)$ Mínimo relativo.

Monotonía:



Creciente (↗): $(2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 2)$

134 Calcula la amplitud del ángulo con el que la recta tangente a la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ corta al eje X en el punto de abscisa $x = 0$

Solución:

$y' = \cos x$

$m = \text{tg } \alpha = \cos 0° = 1$

$\alpha = 45°$