

Unidad 6.

Representación de funciones y problemas

1. Representación de funciones polinómicas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x)$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones polinómicas completando el formulario de los diez apartados:

1 $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

$$y'' = 6x - 12$$

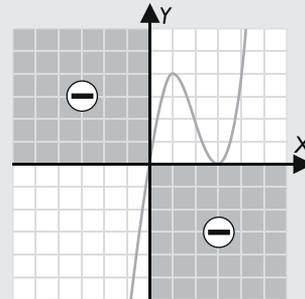
$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$, $A(3, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$Signo:
 - Positiva (+): $(0, 3) \cup (3, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $B(1, 4)$
 - Mínimo relativo: $A(3, 0)$Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(1, 3)$

9. Puntos de inflexión: $D(2, 2)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(2, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

2 $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

Solución:

$$y' = -3x^2 - 6x$$

$$y'' = -6x - 6$$

$$y''' = -6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-\sqrt{3}-1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(\sqrt{3}-1, 0)$
- Eje Y: $D(0, 2)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}-1) \cup (-1, \sqrt{3}-1)$
- Negativa (-): $(-\sqrt{3}-1, -1) \cup (\sqrt{3}-1, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $D(0, 2)$
- Mínimo relativo: $E(-2, -2)$

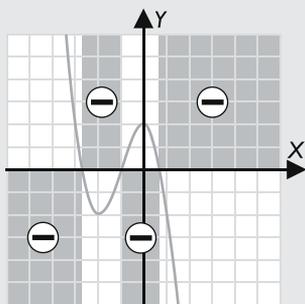
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-2, 0)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $F(-1, 0)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -1)$
- Cóncava (\cap): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3 $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 6x^2$$

$$y'' = 12x^2 - 12x$$

$$y''' = 24x - 12$$

1. Tipo de función: polinómica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Negativa (-): $(0, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $B\left(\frac{3}{2}, -\frac{27}{16}\right)$

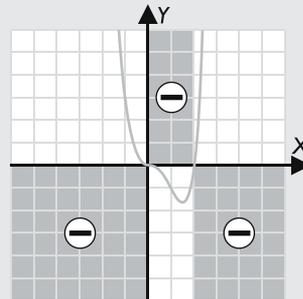
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
- Decreciente (\searrow): $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$, $C(1, -1)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(0, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \left[-\frac{27}{16}, +\infty\right)$$

4 $y = -x^4 + 2x^2$

Solución:

$$y' = -4x^3 + 4x$$

$$y'' = -12x^2 + 4$$

$$y''' = -24x$$

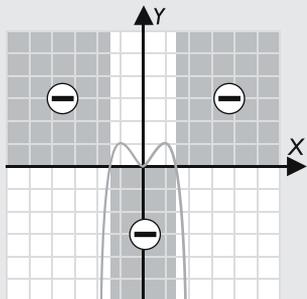
1. Tipo de función: polinómica.
 2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
 4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y
 6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-\sqrt{2}, 0)$, $O(0, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
- Positiva (+): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{2})$
 - Negativa (-): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - a) Máximo relativo: $C(-1, 1)$, $D(1, 1)$
 - b) Mínimo relativo: $O(0, 0)$
- Monotonía:
- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 - Decreciente (\searrow): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}\right), F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}\right)$

Curvatura:

• Convexa (\cup): $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

• Cóncava (\cap): $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$



10. Recorrido o imagen:

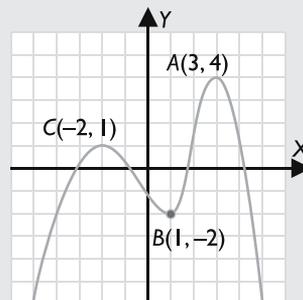
$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1]$$

5 De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(3, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -2)$, otro máximo relativo en el punto $C(-2, 1)$, y que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Solución:



2. Representación de funciones racionales

Piensa y calcula

Calcula mentalmente:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

a) $+\infty$ b) $-\infty$

Aplica la teoría

Representa las siguientes funciones racionales completando el formulario de los diez apartados.

6 $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2}{(x - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6}{(x - 1)^4}$$

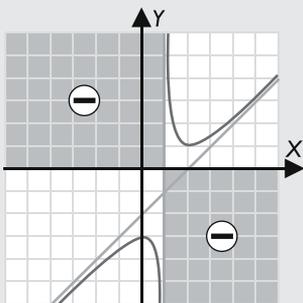
1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 1$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = x - 2$
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, -3)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, -3)$
 - Mínimo relativo: $B(2, 1)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, 2)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

7 $y = \frac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$ y $x = -1$, donde tiene discontinuidades de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par \Rightarrow simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1, x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: no lo corta.
 - Eje Y: $A(0, -1)$

Signo:

 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(0, -1)$
 - Mínimo relativo: no tiene.

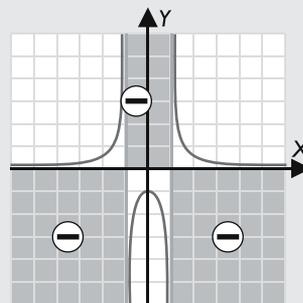
Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
 - Decreciente (\searrow): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$$

8 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 - 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{12(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es impar \Rightarrow simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

 - Positiva (+): $(0, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $A(1, 1)$
 - Mínimo relativo: $B(-1, -1)$

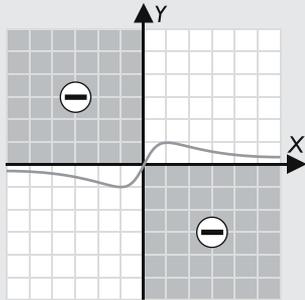
Monotonía:

 - Creciente (\nearrow): $(-1, 1)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $C\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O(0, 0)$,
 $D\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-1, 1]$$

9 $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y''' = \frac{6}{x^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.

5. Simetrías: es impar \Rightarrow Simétrica respecto del eje origen de coordenadas $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: $y = x$

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

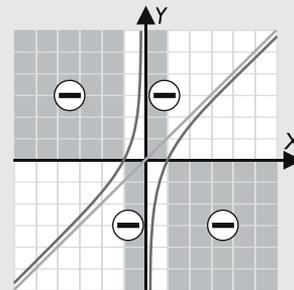
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): \emptyset

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$



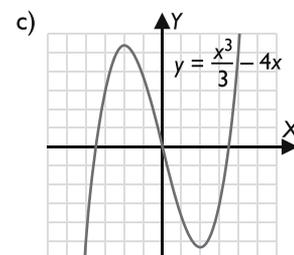
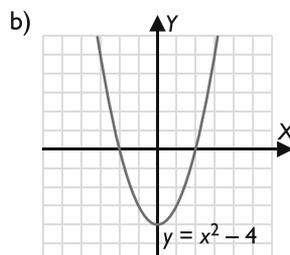
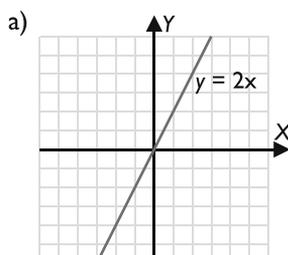
10. Recorrido o imagen:

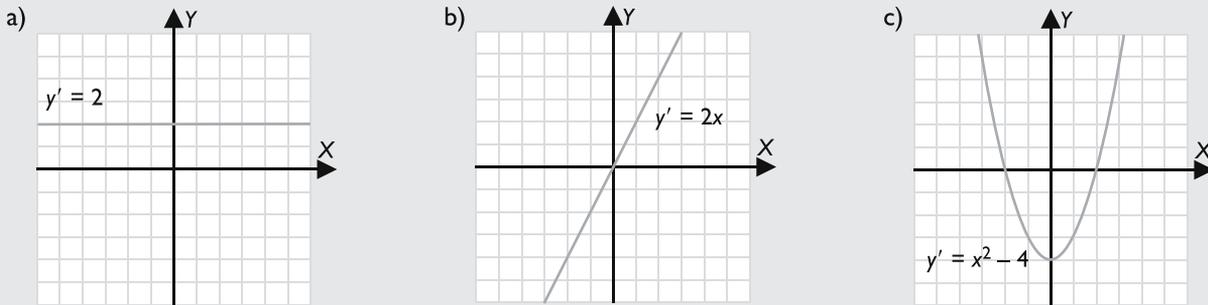
$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3. Funciones con condiciones

Piensa y calcula

Halla y representa la función derivada de cada una de las siguientes funciones polinómicas. ¿Qué relación hay entre el grado de cada una de ellas y el de su derivada?



Solución:

La función derivada de una función polinómica es otra función polinómica de un grado menor.

Aplica la teoría

- 10** Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx$$

tenga un mínimo relativo en el punto $P(1, -4)$

Solución:

Pasa por $P(1, -4)$

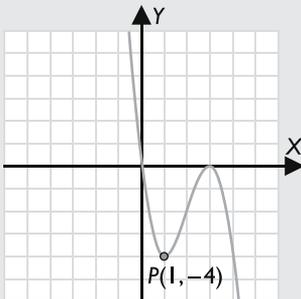
$$y = -x^3 + ax^2 + bx \Rightarrow -1 + a + b = -4$$

Por ser $P(1, -4)$ un mínimo: $y'(1) = 0$

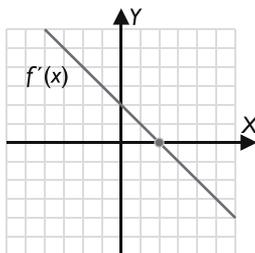
$$y' = -3x^2 + 2ax + b \Rightarrow -3 + 2a + b = 0$$

Resolviendo el sistema: $a = 6, b = -9$

$$y = -x^3 + 6x^2 - 9x$$



- 11** Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Resuelve los siguientes apartados:

- Estudia la monotonía.
- Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = 3$
- Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.
- Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

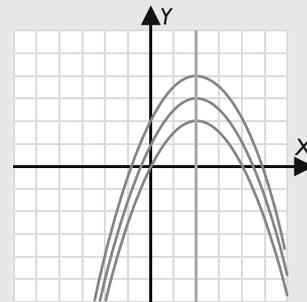
a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, 2)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(2, +\infty)$

b) $f'(3) = -1$

c) Tiene un máximo relativo en $x = 2$

d)



- 12** Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto $P(1, -1)$

Solución:

Pasa por $P(1, -1)$

$$y = ax^4 + bx^3 \Rightarrow a + b = -1$$

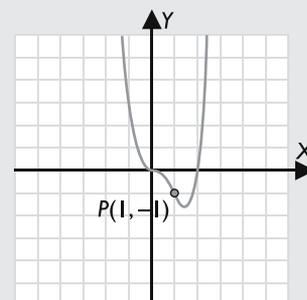
Por ser $P(1, -1)$ un punto de inflexión: $y''(1) = 0$

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2$$

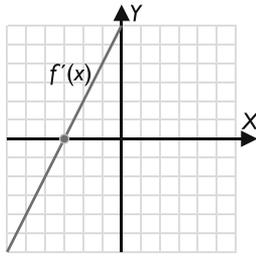
$$y'' = 12ax^2 + 6bx \Rightarrow 12a + 6b = 0$$

Resolviendo el sistema: $a = 1, b = -2$

$$y = x^4 - 2x^3$$



- 13** Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:

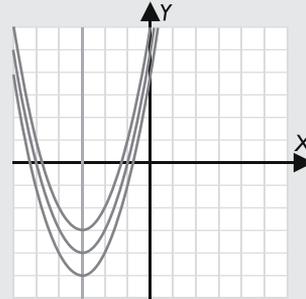


Resuelve los siguientes apartados:

- Estudia la monotonía.
- Calcula la pendiente de la recta tangente para $x = -2$
- Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.
- Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

- La función $f(x)$ es creciente en: $(-3, +\infty)$
La función $f(x)$ es decreciente en: $(-\infty, -3)$
- $f'(-2) = 2$
- Tiene un mínimo relativo en $x = -3$
-



4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

Piensa y calcula

En una ciudad hay una epidemia de gripe, y la función que define el número de enfermos es:

$$f(x) = 125 + 20x - x^2$$

donde x se mide en días, e y , en miles de personas. Calcula mentalmente cuántos enfermos de gripe hay el día en que se detecta la epidemia, es decir, en el momento $x = 0$

Solución:

125 000 personas.

Aplica la teoría

- 14** Un movimiento está definido por la función:

$$e(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$$

donde t se mide en segundos, y e , en metros.

Calcula:

- El espacio recorrido al cabo de 5 s
- La velocidad.
- La velocidad al cabo de 5 s
- La aceleración.
- La aceleración al cabo de 5 s

Solución:

- $e(5) = 48$ m
- $v(t) = e'(t) = 3t^2 - 6t - 1$
- $v(5) = 44$ m/s
- $a(t) = v'(t) = e''(t) = 6t - 6$
- $a(5) = 24$ m/s²

- 15** La resistencia de una viga, en función del peso que soporta, viene dada por $R(x) = 3x - x^2$, donde x se mide en toneladas.

Calcula el peso máximo que soporta.

Solución:

$$R'(x) = 3 - 2x$$

$$R'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$R''(x) = -2 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo.}$$

$x = 1\,500$ kg es el máximo peso soportado.

- 16** Los beneficios de una empresa, en función del número de piezas producidas, vienen dados por:

$$B(x) = -3x^4 + 28x^3 - 84x^2 + 96x - 25$$

donde x se mide en miles de piezas. Calcula el número de piezas que tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

Solución:

$$B'(x) = -12x^3 + 84x^2 - 168x + 96$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2, x = 4$$

$$B''(x) = -36x^2 + 168x - 168$$

Máximos relativos: A(1, 12), B(4, 39)

Mínimo relativo: C(2, 7)

El mayor máximo relativo se obtiene en 4000 unidades.

17 La concentración en la sangre de un medicamento puesto mediante una inyección intravenosa viene dado por:

$$C(t) = 4 - \frac{t^2}{16}$$

donde t es el número de horas que transcurren desde que se inyecta el medicamento en la sangre.

Calcula la velocidad de la concentración.

Solución:

$$C' = -\frac{t}{8}$$

5. Problemas de optimización

Piensa y calcula

Un rectángulo tiene 12 m de perímetro; luego el ancho más el largo es 6 m. Copia y completa la siguiente tabla:

Largo = x	0	1	2	3	4	5	6
Alto = y	6						
Superficie							

Calcula las dimensiones del rectángulo que tiene mayor superficie.

Solución:

Largo = x	0	1	2	3	4	5	6
Alto = y	6	5	4	3	2	1	0
Superficie	0	5	8	9	8	5	0

El rectángulo de mayor superficie es un cuadrado de lado $x = y = 3$ m

Aplica la teoría

18 Calcula dos números cuya suma sea 60 y de forma que sea mínimo el cuadrado del primero más el doble del cuadrado del segundo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = primer número.

y = segundo número.

$$x + y = 60$$

b) Función que hay que minimizar.

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

$$\text{Sujeto a: } x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2$$

$$f(x) = x^2 + 2(60 - x)^2$$

$$f(x) = 3x^2 - 240x + 7200$$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$$f'(x) = 6x - 240$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$$

$$\text{Si } x = 40 \Rightarrow y = 20$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$f''(x) = 6 > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$$

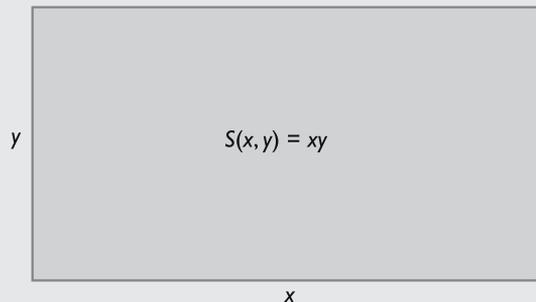
El primer número es $x = 40$, y el segundo, $y = 20$

19 Un ganadero quiere cercar un recinto de forma rectangular en un prado para que puedan pastar las vacas. Si dispone de 1600 m de cerca, ¿cuánto medirá de largo y de ancho el recinto para que la superficie del recinto sea máxima?



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo:

 x = longitud de la base. y = altura.

Perímetro = 1600 m

b) Función que hay que maximizar.

$$S(x, y) = xy$$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 1600 m

$$x + y = 800$$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$$S(x, y) = xy$$

$$x + y = 800$$

$$y = 800 - x$$

$$S(x) = x(800 - x)$$

$$S(x) = 800x - x^2$$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$$S'(x) = 800 - 2x$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = 400$$

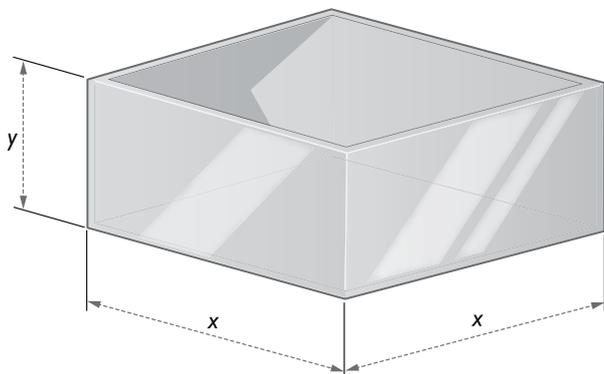
$$\text{Si } x = 400 \Rightarrow y = 400$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

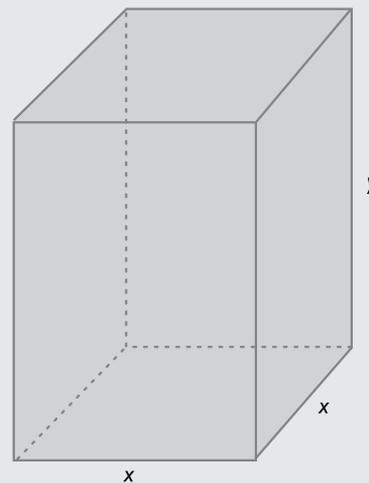
$$S''(x) = -2 < 0 \text{ (-)} \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

f) El recinto es un cuadrado que mide 400 m de lado.

20 Se quiere construir un recipiente en forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 24 m^2 , ¿qué dimensiones debe tener la caja?

**Solución:**

a) Incógnitas, datos y dibujo.

 x = longitud de la base. y = altura.Superficie = 24 m^2 

b) Función que hay que maximizar.

$$V(x, y) = x^2y$$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 24 m^2

$$4xy + 2x^2 = 24$$

$$2xy + x^2 = 12$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$V(x, y) = x^2y$$

$$2xy + x^2 = 12$$

$$y = \frac{12 - x^2}{2x}$$

$$V(x) = \frac{x(12 - x^2)}{2}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} (12x - x^3)$$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$$V'(x) = \frac{1}{2} (12 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 2$$

(La solución negativa no tiene sentido).

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow y = 2$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$V''(x) = -3x$$

$$V''(2) = -6 < 0 \text{ (-)} \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

f) La caja es un cubo de arista 2 m y tendrá un volumen de 8 m^3

Ejercicios y problemas propuestos

Ejercicios propuestos

1. Representación de funciones polinómicas

21 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^3}{6} - 2x$$

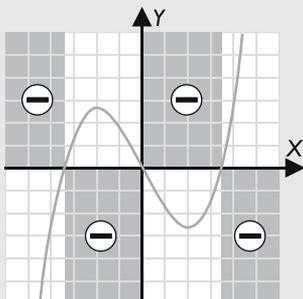
Solución:

$$y' = \frac{x^2}{2} - 2$$

$$y'' = x$$

$$y''' = 1$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0), A(-2\sqrt{3}, 0), B(2\sqrt{3}, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C\left(-2, \frac{8}{3}\right)$
 - Mínimo relativo: $D\left(2, -\frac{8}{3}\right)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-2, 2)$
- Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

22 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x$$

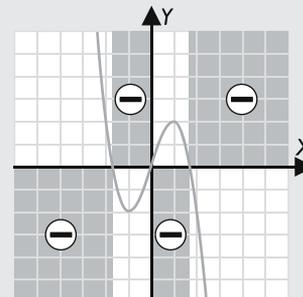
Solución:

$$y' = -3x^2 + 3$$

$$y'' = -6x$$

$$y''' = -6$$

- Tipo de función: polinómica.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0), A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
 - Negativa (-): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: $C(1, 2)$
 - Mínimo relativo: $D(-1, -2)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-1, 1)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, 0)$
 - Cóncava (\cap): $(0, +\infty)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

23 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - 4x^2$$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 8x$$

$$y'' = 12x^2 - 8$$

$$y''' = 24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Negativa (-): $(-2, 0) \cup (0, 2)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $O(0, 0)$
- Mínimo relativo: $C(-\sqrt{2}, -4)$, $D(\sqrt{2}, -4)$

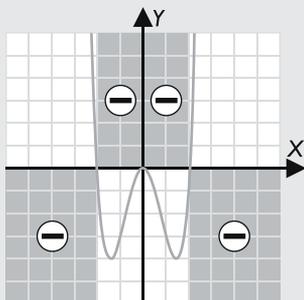
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

9. Puntos de inflexión: $E\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$, $F\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$$

24 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^4 + 6x^2 - 5$$

Solución:

$$y' = -4x^3 + 12x$$

$$y'' = -12x^2 + 12$$

$$y''' = -24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-\sqrt{5}, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D(\sqrt{5}, 0)$
- Eje Y: $E(0, -5)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\sqrt{5}, -1) \cup (1, \sqrt{5})$
- Negativa (-): $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $F(-\sqrt{3}, 4)$, $G(\sqrt{3}, 4)$
- Mínimo relativo: $E(0, -5)$

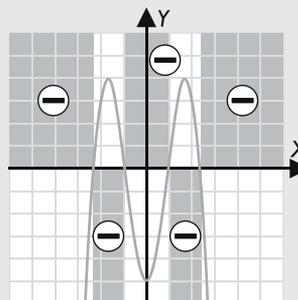
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
- Decreciente (\searrow): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $B(-1, 0)$, $C(1, 0)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-1, 1)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



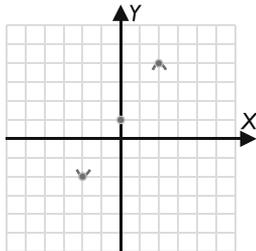
10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$$

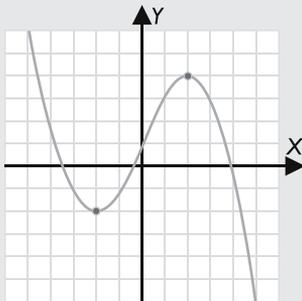
- 25** De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(2, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(-2, -2)$, un punto de inflexión en el punto $C(0, 1)$ y que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno la gráfica a mano alzada.



Solución:



2. Representación de funciones racionales

- 26** Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 + 4}{2x}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{4}{x^3}$$

$$y''' = -\frac{12}{x^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: $y = \frac{x}{2}$

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(0, +\infty)$
- Negativa (-): $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(-2, -2)$
- Mínimo relativo: $B(2, 2)$

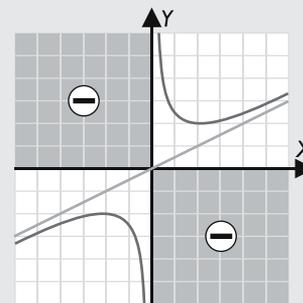
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-2, 0) \cup (0, 2)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$$

- 27** Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{1 - x}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4}{(x - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{12}{(x - 1)^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$

6. Asíntotas:

- Verticales: $x = 1$
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: $y = -x$

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-1, 0), B(2, 0)$
- Eje Y: $C(0, -2)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, 2)$
- Negativa (-): $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

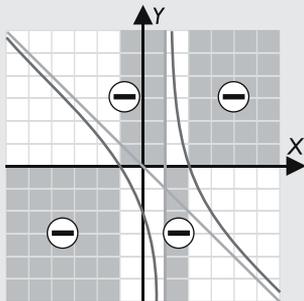
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): \emptyset
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: $y = 0$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: $A(0, 2)$

Signo:

- Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Negativa (-): \emptyset

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 2)$
- Mínimo relativo: no tiene.

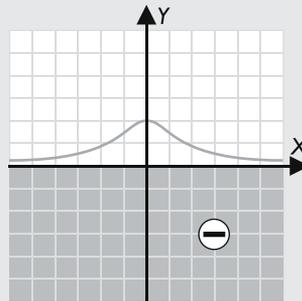
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0)$
- Decreciente (\searrow): $(0, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $B(-1, \frac{3}{2}), C(1, \frac{3}{2})$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (\cap): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, 2]$$

28 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Solución:

$$y' = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{36x^2 - 36}{(x^2 + 3)^3}$$

$$y''' = \frac{-144x^3 + 432x}{(x^2 + 3)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y

29 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:

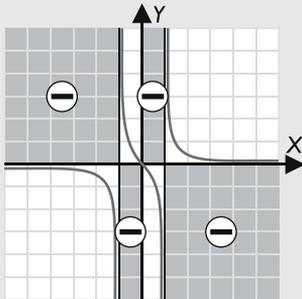
$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y $x = 1$, donde tiene discontinuidades de primera especie de salto infinito.

4. Periodicidad: no es periódica.
 5. Simetrías: es impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
 6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = -1$ y $x = 1$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
 7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
 8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): \emptyset
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
 9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
- Convexa (\cup): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Funciones con condiciones

- 30** Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función siguiente tenga un máximo relativo en el punto $P(3, 4)$: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 5$

Solución:

Pasa por $P(3, 4) \Rightarrow 27a + 9b - 5 = 4$

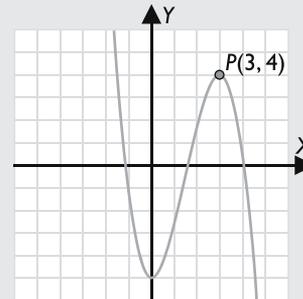
$y' = 3ax^2 + 2bx$

Máximo en $(3, 4) \Rightarrow y'(3) = 0 \Rightarrow 27a + 6b = 0$

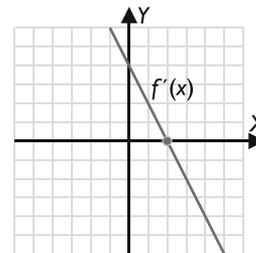
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$a = -\frac{2}{3}, b = 3$$

$$y = -\frac{2x^3}{3} + 3x^2 - 5$$



- 31** Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:

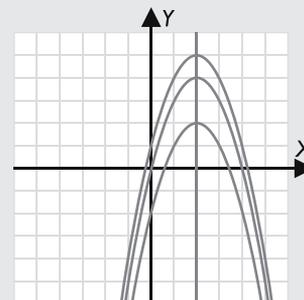


Calcula para $f(x)$:

- a) La monotonía.
- b) La pendiente de la recta tangente para $x = 1$
- c) Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.
- d) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

- a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, 2)$
 La función $f(x)$ es decreciente en: $(2, +\infty)$
- b) $f'(1) = 2$
- c) Tiene un máximo relativo en $x = 2$
- d)



- 32** Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función siguiente tenga un máximo relativo en el punto $P(1, 1)$: $f(x) = ax^4 + bx^3 - bx^2$

Solución:

$$\text{Pasa por } P(1, 1) \Rightarrow a + b - b = 1 \Rightarrow a = 1$$

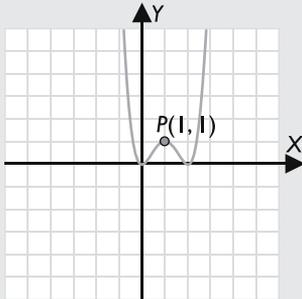
$$y' = 4ax^3 + 3bx^2 - 2bx$$

$$\text{Máximo en } (1, 1) \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow 4a + 3b - 2b = 0$$

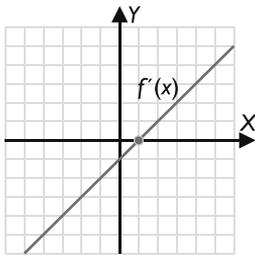
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$a = 1, b = -4$$

$$y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$$



- 33** Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Calcula para $f(x)$:

- La monotonía.
- La pendiente de la recta tangente para $x = 4$
- Razona si tiene un máximo o mínimo relativo y halla su abscisa.
- Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

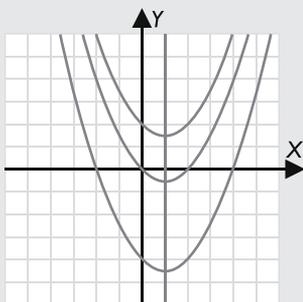
- a) La función $f(x)$ es creciente en: $(1, +\infty)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(-\infty, 1)$

b) $f'(4) = 3$

- c) Tiene un mínimo relativo en $x = 1$

d)



4. Aplicaciones de las derivadas a otras áreas

- 34** Un movimiento rectilíneo uniforme (m.r.u.) es:

$$e(t) = 2t - 4$$

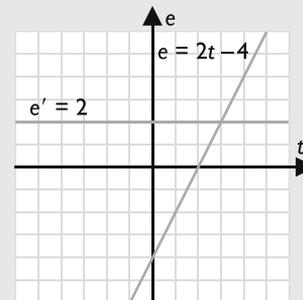
- Calcula el espacio recorrido al cabo de 5 segundos.
- Calcula la velocidad.
- Representa en los mismos ejes coordenados el espacio y la velocidad.
¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

a) $e(5) = 6$ m

b) $v(t) = e'(t) = 2$ m/s

c)



El espacio es una función afín y la velocidad es una función constante.

- 35** La longitud de un feto a lo largo del embarazo viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \frac{x^3}{600}$$

donde x se mide en semanas, e y , en centímetros.

- Si el embarazo dura 40 semanas, ¿cuánto mide el niño?
- ¿En qué momento crece más rápidamente; es decir, cuándo es máxima la derivada?

Solución:

a) $f(40) = \frac{160}{3} = 53,33$ cm

b) $f'(x) = \frac{x}{5} - \frac{x^2}{200}$

$$f''(x) = \frac{1}{5} - \frac{x}{100}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{x}{100} = 0 \Rightarrow x = 20 \text{ semanas}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{100} < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

- 36** Los beneficios anuales de una empresa se ajustan a la siguiente función:

$$B(x) = \frac{100x}{x^2 + 25}$$

donde x es el número de años que lleva funcionando y $B(x)$ se mide en millones de euros.

- ¿En qué momento los beneficios son máximos?
- Calcula los beneficios en el momento en que sean máximos.

Solución:

$$a) B(x) = \frac{100x}{x^2 + 25}$$

$$B'(x) = \frac{-100x^2 + 2500}{(x^2 + 25)^2}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 5, x = -5$$

(El valor negativo no tiene sentido).

$$B''(x) = \frac{200x^3 - 15000x}{(x^2 + 25)^3}$$

$$B''(5) = -\frac{2}{5} < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

Los beneficios son máximos a los 5 años.

$$b) B(5) = 10 \text{ millones de euros}$$

- 37** Los valores de las acciones de una determinada empresa, a lo largo de los 12 meses de un año, están definidos por la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{50} - \frac{3x^2}{10} + \frac{24x}{25} + 15$$

donde x es el número del mes y $f(x)$ es el valor de cada acción en euros.

Calcula:

- El valor de las acciones al comenzar el año.
- El valor de las acciones al final del año.
- El valor máximo y mínimo de las acciones a lo largo del año.

Solución:

$$a) f(0) = 15 \text{ €}$$

$$b) f(12) = \frac{447}{25} = 17,88 \text{ €}$$

$$c) f'(x) = \frac{3x^2}{50} - \frac{3x}{5} + \frac{24}{25}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 8$$

$$f''(x) = -\frac{3x}{25} - \frac{3}{5}$$

$$f''(2) = -9/25 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo. Alcanza el máximo relativo en el segundo mes y valen a } 397/25 = 15,88 \text{ €}$$

Como el máximo relativo es menor que el valor de las acciones al final del año, el mayor valor lo alcanzan al final del año y vale 17,88 €

$$f''(8) = 9/25 > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo. Alcanza el mínimo relativo en el octavo mes y valen a } 343/25 = 13,72 \text{ €}$$

5. Problemas de optimización

- 38** Calcula dos números x e y tales que su producto sea máximo, sabiendo que suman 60

Solución:

- a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = primer número.

y = segundo número.

$$x + y = 60$$

- b) Función que hay que maximizar.

$$f(x, y) = xy$$

$$\text{sujeto a: } x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$$

- c) Se escribe la función con una sola variable.

$$f(x, y) = xy$$

$$f(x) = x(60 - x)$$

$$f(x) = 60x - x^2$$

- d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$$f'(x) = 60 - 2x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 30$$

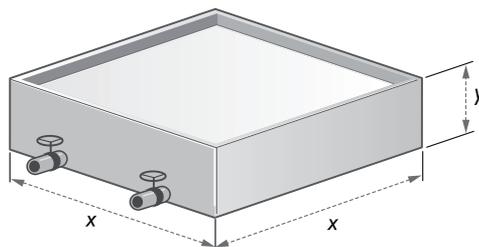
$$\text{Si } x = 30 \Rightarrow y = 30$$

- e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$f''(30) = -2 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

El primer número es $x = 30$ y el segundo $y = 30$

- 39** Se quiere construir un depósito abierto, es decir, sin tapa, con forma de prisma cuadrangular tal que el volumen sea máximo. Si la superficie es de 48 m^2 , ¿qué dimensiones debe tener el depósito?



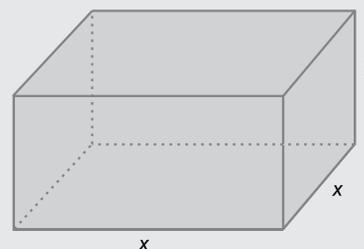
Solución:

- a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

$$\text{Superficie} = 48 \text{ m}^2$$



- b) Función que hay que maximizar.

$$V(x, y) = x^2y$$

Sujeta a las condiciones:

$$\text{Superficie} = 48 \text{ m}^2 \Rightarrow 4xy + x^2 = 48$$

- c) Se escribe la función con una sola variable.

$$V(x, y) = x^2y$$

$$4xy + x^2 = 48 \Rightarrow y = \frac{48 - x^2}{4x}$$

$$V(x) = \frac{1}{4} (48x - x^3)$$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$V'(x) = \frac{1}{4} (48 - 3x^2)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = -4 \vee x = 4$$

(La solución negativa no tiene sentido).

$$\text{Si } x = 4 \Rightarrow y = 2$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$V''(x) = -\frac{3x}{2}$$

$$V''(4) = -6 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

f) El depósito tiene de base un cuadrado de lado 4 m y altura 2 m, y tendrá un volumen de 32 m³

40 La suma de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m. Halla las longitudes de los catetos para que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sea mínima.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = cateto mayor.

y = cateto menor.

Suma de los catetos = 12 m



b) Función que hay que maximizar.

$$A(x, y) = x^2 + y^2$$

Sujeta a las condiciones:

$$x + y = 12$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(x, y) = x^2 + y^2$$

$$x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$$

$$A(x) = x^2 + (12 - x)^2$$

$$A(x) = 2x^2 - 24x + 144$$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$A'(x) = 4x - 24$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$\text{Si } x = 6 \Rightarrow y = 6$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = 4$$

$$A''(6) = 4 > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$$

f) El triángulo es isósceles y sus catetos miden 6 m

Para ampliar

41 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

Solución:

$$y' = 3x^2 - 12x + 12$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$y''' = 6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

• Eje X: $A(1, 0)$

• Eje Y: $B(0, -7)$

Signo:

• Positiva (+): $(1, +\infty)$

• Negativa (-): $(-\infty, 1)$

8. Máximos y mínimos relativos:

• Máximo relativo: no tiene.

• Mínimo relativo: no tiene.

Monotonía:

• Creciente (\nearrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

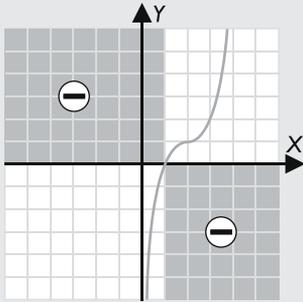
• Decreciente (\searrow): \emptyset

9. Puntos de inflexión: $C(2, 1)$

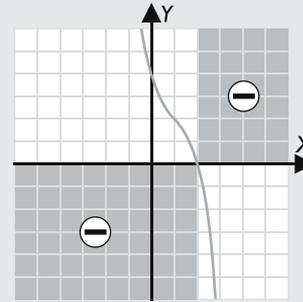
Curvatura:

• Convexa (\cup): $(2, +\infty)$

• Cóncava (\cap): $(-\infty, 2)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

42 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = -x^3 + 3x^2 - 4x + 4$$

Solución:

$$y' = -3x^2 + 6x - 4$$

$$y'' = -6x + 6$$

$$y''' = -6$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(2, 0)$
 - Eje Y: $B(0, 4)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 2)$
 - Negativa (-): $(2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): \emptyset
 - Decreciente (\searrow): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C(1, 2)$
 Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, 1)$
 - Cóncava (\cap): $(1, +\infty)$

43 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 + 2x^2$$

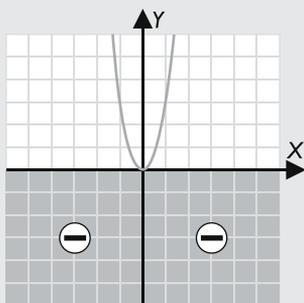
Solución:

$$y' = 4x^3 + 4x$$

$$y'' = 12x^2 + 4$$

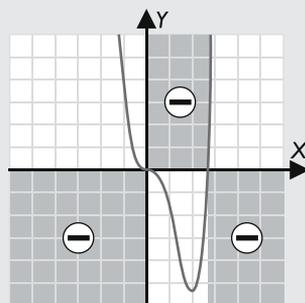
$$y''' = 24x$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: no tiene.
 - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
 Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
 - Negativa (-): \emptyset
8. Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $O(0, 0)$
 Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
 Curvatura:
 - Convexa (\cup): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
 - Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, +\infty)$$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [-16/3, +\infty)$$

44 Representa la siguiente función polinómica completando el formulario de los diez apartados.

$$y = x^4 - \frac{8}{3}x^3$$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 8x^2$$

$$y'' = 12x^2 - 16x$$

$$y''' = 24x - 16$$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$.

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: no tiene.
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $O(0, 0)$, $A\left(\frac{8}{3}, 0\right)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{8}{3}, +\infty\right)$
- Negativa (-): $\left(0, \frac{8}{3}\right)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $O\left(2, -\frac{16}{3}\right)$

Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(2, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 2)$

9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$, $B\left(\frac{4}{3}, -\frac{256}{81}\right)$

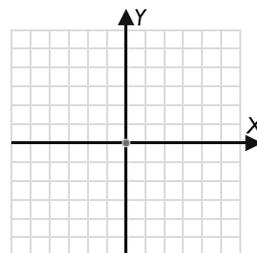
Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$
- Cóncava (\cap): $\left(0, \frac{4}{3}\right)$

45 De una función polinómica de tercer grado se sabe que tiene un punto de inflexión en el punto $O(0, 0)$, no tiene ni máximos ni mínimos relativos, y que:

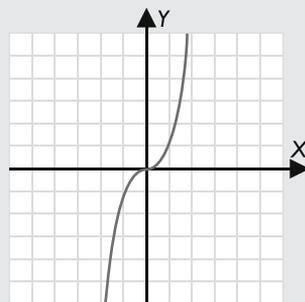
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno una gráfica a mano alzada. Halla una fórmula para esta gráfica.



Solución:

$$y = x^3$$

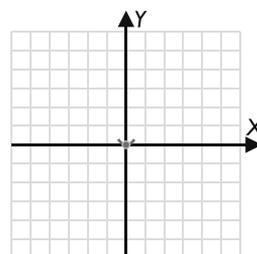


46 De una función polinómica de cuarto grado se sabe que tiene un solo mínimo relativo en el punto $O(0, 0)$, no tiene ni máximos relativos, ni puntos de inflexión, y que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno una gráfica a mano alzada.

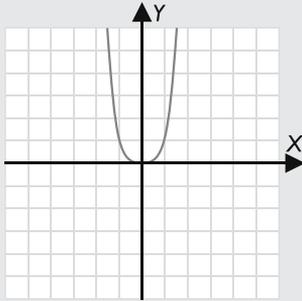
Halla una fórmula para esta gráfica.



Ejercicios y problemas propuestos

Solución:

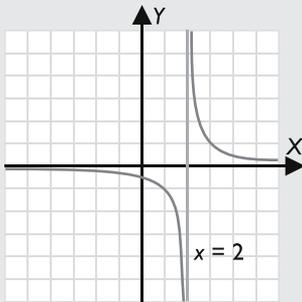
$$y = x^4$$



47 Halla una función racional que tenga como asíntota vertical la recta $x = 2$

Solución:

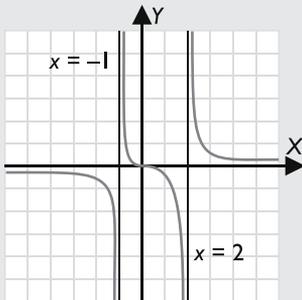
Por ejemplo, $y = \frac{1}{x-2}$



48 Halla una función racional que tenga dos asíntotas verticales $x = 2$, $x = -1$

Solución:

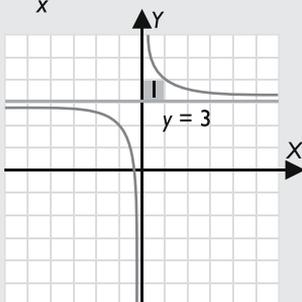
Por ejemplo, $y = \frac{x}{(x-2)(x+1)}$



49 Halla una función racional que tenga como asíntota horizontal la recta $y = 3$

Solución:

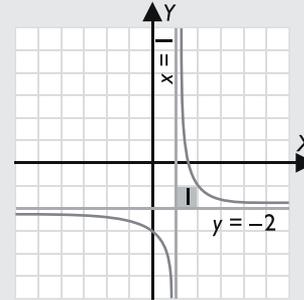
Por ejemplo, $y = \frac{1}{x} + 3$



50 Halla una función racional que tenga dos asíntotas: una vertical, $x = 1$, y otra horizontal, $y = -2$

Solución:

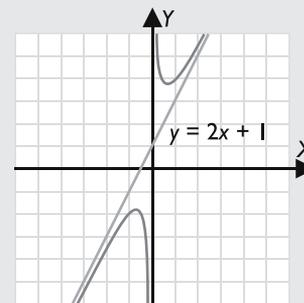
Por ejemplo, $y = \frac{1}{x-1} - 2$



51 Halla una función racional que tenga como asíntota oblicua $y = 2x + 1$

Solución:

Por ejemplo, $y = 2x + 1 + \frac{1}{x}$, es decir, $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x}$



52 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{2x-1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = \frac{-2x+2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{4x-6}{x^4}$$

$$y''' = \frac{-12x+24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- Negativa (-): $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $B(1, 1)$
- Mínimo relativo: no tiene.

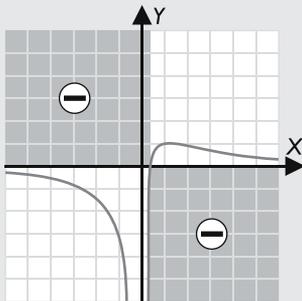
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(0, 1)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: $C\left(\frac{3}{2}, \frac{8}{9}\right)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (-\infty, 1]$$

53 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

Solución:

$$y' = \frac{6x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{-18x^2 + 18}{(x^2 + 3)^3}$$

$$y''' = \frac{72x^3 - 216x}{(x^2 + 3)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas:

- Verticales: no tiene.
- Horizontales: $y = 1$
- Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: $O(0, 0)$
- Eje Y: $O(0, 0)$

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Negativa (-): \emptyset

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: $O(0, 0)$

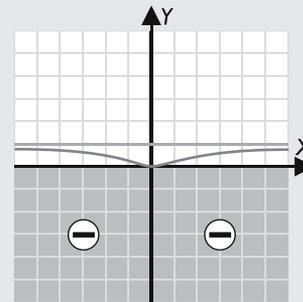
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
- Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$

9. Puntos de inflexión: $A\left(-1, \frac{1}{4}\right), B\left(1, \frac{1}{4}\right)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $(-1, 1)$
- Cóncava (\cap): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = [0, 1)$$

54 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x}{4 - x^2}$$

Solución:

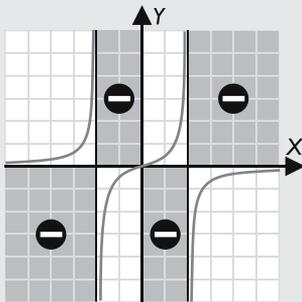
$$y' = \frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{-2x^3 - 24x}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = \frac{6(x^4 + 24x^2 + 16)}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -2$ y $x = 2$, donde tiene discontinuidad de primera especie de salto infinito.

- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es impar \Rightarrow Simétrica respecto del origen.
- Asíntotas:
 - Verticales: $x = -2, x = 2$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $O(0, 0)$
 - Eje Y: $O(0, 0)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 - Negativa (-): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: no tiene.
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): \emptyset
- Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
- Curvatura:
 - Convexa (\cup): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 - Cóncava (\cap): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

55 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{-12x^2 + 4}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = \frac{48x^3 - 48x}{(x^2 + 1)^4}$$

- Tipo de función: racional.
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Continuidad: es continua en todo el dominio.

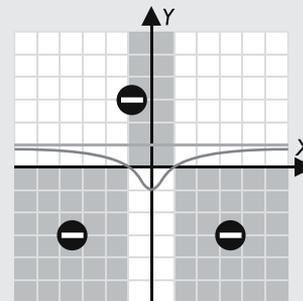
- Periodicidad: no es periódica.
- Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y
- Asíntotas:
 - Verticales: no tiene.
 - Horizontales: $y = 1$
 - Oblicuas: no tiene.
- Corte con los ejes:
 - Eje X: $A(-1, 0), B(1, 0)$
 - Eje Y: $C(0, -1)$
- Signo:
 - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
 - Negativa (-): $(-1, 1)$
- Máximos y mínimos relativos:
 - Máximo relativo: no tiene.
 - Mínimo relativo: $C(0, -1)$
- Monotonía:
 - Creciente (\nearrow): $(0, +\infty)$
 - Decreciente (\searrow): $(-\infty, 0)$

- Puntos de inflexión: $D\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right), E\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Curvatura:

- Convexa (\cup): $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

- Cóncava (\cap): $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$



- Recorrido o imagen:
 $\text{Im}(f) = [-1, 1)$

56 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = ax^4 + bx^3$$

tenga un punto de inflexión en el punto $P(2, 3)$

Solución:

Pasa por $P(2, 3) \Rightarrow y(2) = 3 \Rightarrow 16a + 8b = 3$

$$y' = 4ax^3 + 3bx^2$$

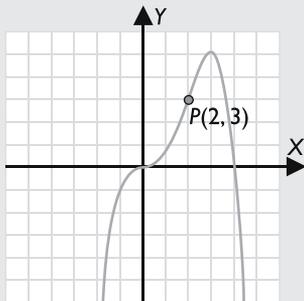
$$y'' = 12ax^2 + 6bx$$

Punto de inflexión en $P(2, 3) \Rightarrow y''(2) = 0 \Rightarrow 48a + 12b = 0$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$a = -\frac{3}{16}, b = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{3x^4}{16} + \frac{3x^3}{4}$$



57 Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función:

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

tenga un mínimo relativo en el punto $P(1, 3)$

Solución:

$$\text{Pasa por } P(1, 3) \Rightarrow y(1) = 3 \Rightarrow 1 + a + b = 3$$

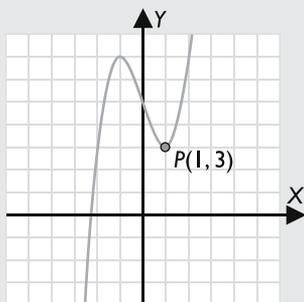
$$y' = 3x^2 + a$$

$$\text{Mínimo relativo en } P(1, 3) \Rightarrow y'(1) = 0 \Rightarrow 3 + a = 0$$

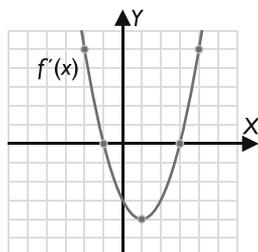
Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$a = -3, b = 5$$

$$y = x^3 - 3x + 5$$



58 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la parábola siguiente:



Calcula para $f(x)$:

- La monotonía.
- Las abscisas del máximo y del mínimo relativos.
- La curvatura.

d) La abscisa del punto de inflexión.

e) Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

a) La función $f(x)$ es creciente en: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

La función $f(x)$ es decreciente en: $(-1, 3)$

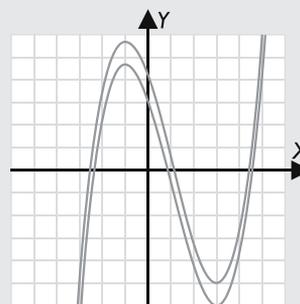
b) Tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$

c) Convexa (\cup): $(1, +\infty)$

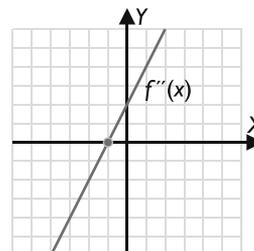
Cóncava (\cap): $(-\infty, 1)$

d) Punto de inflexión en $x = 1$

e)



59 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su segunda derivada $f''(x)$ es la recta siguiente:



Calcula para $f(x)$:

- La curvatura.
- La abscisa del punto de inflexión.
- Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

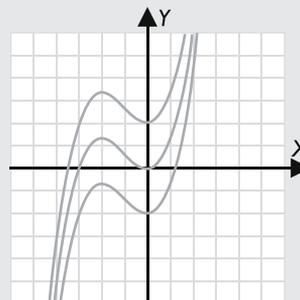
Solución:

a) Convexa (\cup): $(-1, +\infty)$

Cóncava (\cap): $(-\infty, -1)$

b) Punto de inflexión en $x = -1$

c)



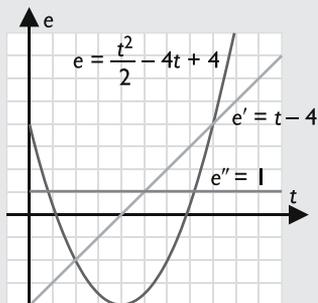
- 60** Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = \frac{t^2}{2} - 4t + 4$$

- Calcula el espacio recorrido al cabo de 7 s
- Calcula la velocidad al cabo de 7 s
- Calcula la aceleración al cabo de 7 s
- Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

- $e(7) = \frac{1}{2} \text{ m}$
- $v(t) = e'(t) = t - 4$
 $v(7) = e'(7) = 3 \text{ m/s}$
- $a(t) = v'(t) = 1$
 $a(7) = 1 \text{ m/s}^2$



La gráfica del espacio es una parábola; la de la velocidad, una recta inclinada, y la de la aceleración, una recta horizontal.

- 61** Un agente de seguros cobra una comisión que viene dada por la función:

$$C(x) = -0,001x^2 + 0,05x + 20$$

Calcula cuántos seguros debe hacer para que la comisión sea máxima.

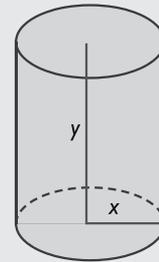
Solución:

- $$C'(x) = -0,002x + 0,05$$
- $$C'(x) = 0 \Rightarrow x = 25$$
- $$C''(x) = -0,002 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$
- Para $x = 25$ seguros, obtiene la máxima comisión.

- 62** De todos los cilindros de volumen $16\pi \text{ m}^3$, halla el de superficie mínima.

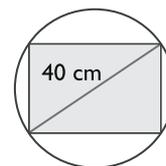
Solución:

- Incógnitas, datos y dibujo.
 x = longitud del radio.
 y = altura.
Volumen = $16\pi \text{ m}^3$



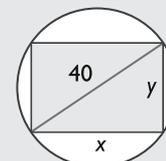
- Función que hay que minimizar.
 $A(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$
Sujeta a las condiciones:
Volumen = $16\pi \text{ m}^3 \Rightarrow \pi x^2 y = 16\pi$
- Se escribe la función con una sola variable.
 $A(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi xy$
 $\pi x^2 y = 16\pi \Rightarrow y = \frac{16}{x^2}$
 $A(x) = 2\pi x^2 + \frac{32\pi}{x}$
- Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.
 $A'(x) = 4\pi x - \frac{32\pi}{x^2}$
 $A'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$
Si $x = 2 \Rightarrow y = 4$
- Se comprueba en la segunda derivada.
 $A''(x) = 4\pi + \frac{64\pi}{x^3}$
 $A''(2) = 12\pi > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$
- El cilindro tiene un radio de 2 m y una altura de 4 m con una superficie mínima de $24\pi \text{ m}^2$

- 63** Calcula las dimensiones del mayor rectángulo que se puede inscribir en una circunferencia de radio 20 cm



Solución:

- Incógnitas, datos y dibujo.
 x = base del rectángulo.
 y = altura del rectángulo.
Radio de la circunferencia circunscrita = 20 cm



- Función que hay que maximizar.
 $A(x, y) = xy$
Sujeta a las condiciones:
 $x^2 + y^2 = 40^2$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(x, y) = xy$$

$$x^2 + y^2 = 40^2 \Rightarrow y = \sqrt{1600 - x^2}$$

$$A(x) = x\sqrt{1600 - x^2}$$

$$A(x) = \sqrt{1600x^2 - x^4}$$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$A'(x) = \frac{1600 - 2x^2}{\sqrt{1600 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 20\sqrt{2}, x = -20\sqrt{2}$$

(La solución negativa no tiene sentido).

$$\text{Si } x = 20\sqrt{2} \Rightarrow y = 20\sqrt{2}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = \frac{2x^3 - 4800x}{(1600 - x^2)\sqrt{1600 - x^2}}$$

$$A''(20\sqrt{2}) = -4 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

f) El rectángulo es un cuadrado de lado $20\sqrt{2}$ cm con un área de 800 cm^2

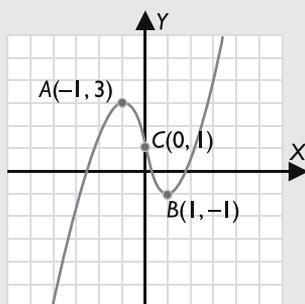
Problemas propuestos

64 De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(-1, 3)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -1)$ y un punto de inflexión en el punto $C(0, 1)$, y que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja la gráfica a mano alzada.

Solución:



65 Estudia si en el punto $O(0, 0)$ la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = x^4 - x$$

Solución:

$$y' = 4x^3 - 1$$

$$y'' = 12x^2$$

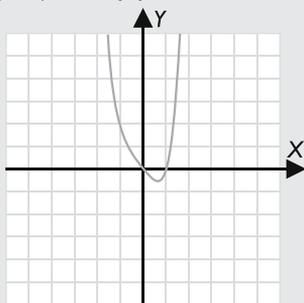
$$y''(0) = 0$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{IV} = 24, \text{ es de orden par.}$$

En el punto $O(0, 0)$ no hay punto de inflexión.



66 Estudia el punto $P(0, -1)$ de la función polinómica:

$$y = x^4 - 1$$

Solución:

$$y' = 4x^3$$

$$y' = 0$$

$$y'' = 12x^2$$

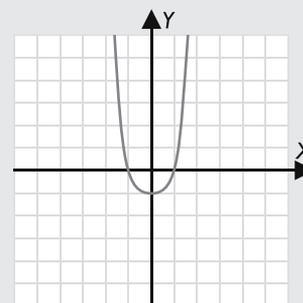
$$y''(0) = 0$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{IV} = 24 > 0 (+)$$

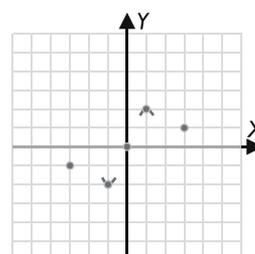
La función tiene un mínimo relativo en $P(0, -1)$



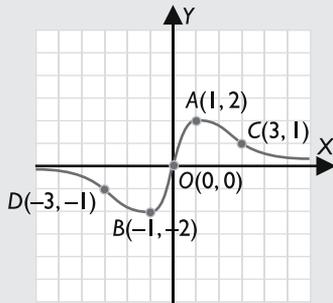
67 De una función racional se sabe que tiene como asíntota $y = 0$, tiene un máximo relativo en el punto $A(1, 2)$, un mínimo relativo en el punto $B(-1, -2)$, puntos de inflexión en $O(0, 0)$, $C(3, 1)$ y $D(-3, -1)$, y que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^-$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno la gráfica a mano alzada.



Solución:



68 Estudia el punto $P(0, 3)$ de la siguiente función racional:

$$y = \frac{9}{x^2 + 3}$$

Solución:

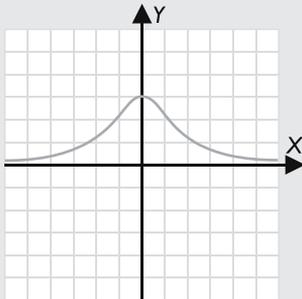
$$y' = -\frac{18x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y'(0) = 0$$

$$y'' = \frac{54x^2 - 54}{(x^2 + 3)^3}$$

$$y''(0) = -2 < 0 \text{ (-)}$$

El punto $P(0, 3)$ es un máximo relativo.



69 Estudia el punto $O(0, 0)$ de la siguiente función racional:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'(0) = 3$$

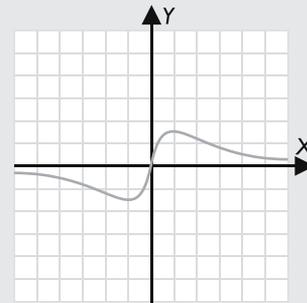
$$y'' = -\frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''' = -\frac{18(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

$$y'''(0) = -18 \neq 0$$

En el punto $(0, 0)$ hay un punto de inflexión.



70 Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y tiene un mínimo relativo en el punto $P(2, -4)$

Solución:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Pasa por } O(0, 0) \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Pasa por } P(2, -4) \Rightarrow y(2) = -4 \Rightarrow 4a + 2b = -4$$

$$y' = 2ax + b$$

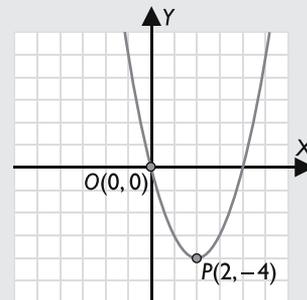
$$\text{Tiene un mínimo relativo en } P(2, -4) \Rightarrow y'(2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4a + b = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$a = 1, b = -4, c = 0$$

$$y = x^2 - 4x$$



71 Aplicando el cálculo de derivadas, halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo relativo en el punto $P(-2, 4)$

Solución:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Pasa por } O(0, 0) \Rightarrow y(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{Pasa por } P(-2, 4) \Rightarrow y(-2) = 4 \Rightarrow 4a - 2b = 4$$

$$y' = 2ax + b$$

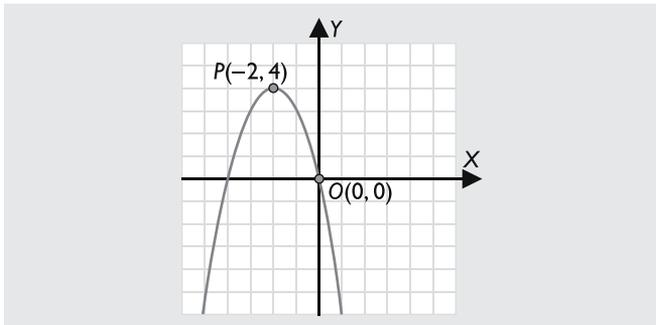
$$\text{Tiene un máximo relativo en } P(-2, 4) \Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4a + b = 0$$

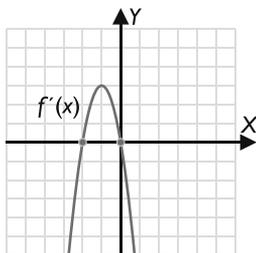
Resolviendo el sistema:

$$a = -1, b = -4, c = 0$$

$$y = -x^2 - 4x$$



72 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la parábola siguiente:

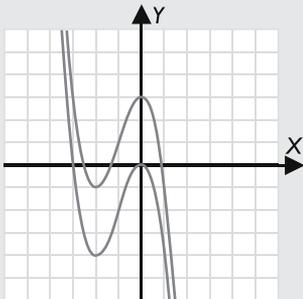


Calcula para $f(x)$:

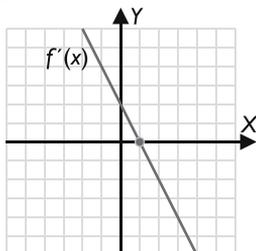
- La monotonía.
- Las abscisas del máximo y del mínimo relativos.
- La curvatura.
- La abscisa del punto de inflexión.
- Haz una aproximación de una gráfica de la función $f(x)$

Solución:

- La función $f(x)$ es creciente en: $(-2, 0)$
La función $f(x)$ es decreciente en: $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
- Tiene un mínimo relativo en $x = -2$ y tiene un máximo relativo en $x = 0$
- Convexa (\cup): $(-\infty, -1)$
Cóncava (\cap): $(-1, +\infty)$
- Punto de inflexión en $x = -1$
- e)



73 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Calcula la fórmula de $f(x)$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$$y' = -2x + 2$$

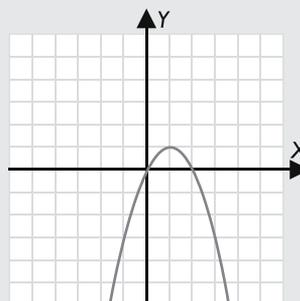
La función debe ser de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$

Como pasa por el origen: $c = 0$

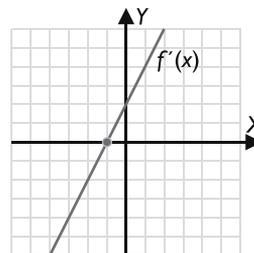
$$y' = 2ax + b$$

$$2ax + b = -2x + 2 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

$$y = -x^2 + 2x$$



74 Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su derivada $f'(x)$ es la recta siguiente:



Calcula la fórmula de $f(x)$ sabiendo que pasa por el origen de coordenadas.

Solución:

$$y' = 2x + 2$$

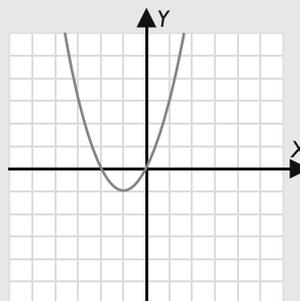
La función debe ser de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$

Como pasa por el origen: $c = 0$

$$y' = 2ax + b$$

$$2ax + b = 2x + 2 \Rightarrow a = 1, b = 2$$

$$y = x^2 + 2x$$



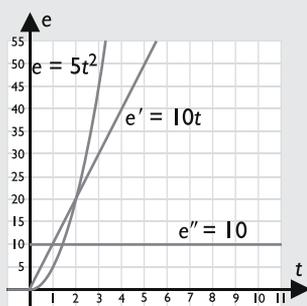
- 75** Un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) está definido por la función:

$$e(t) = 5t^2$$

- Calcula el espacio recorrido al cabo de 3 s
- Calcula la velocidad al cabo de 3 s
- Calcula la aceleración al cabo de 3 s
- Representa en los mismos ejes el espacio, la velocidad y la aceleración. ¿Qué tipo de gráficas son?

Solución:

- $e(3) = 45$ m
- $v(t) = 10t$
 $v(3) = 10 \cdot 3 = 30$ m/s
- $a(t) = 10$
 $a(3) = 10$ m/s²
-



La gráfica del espacio es una parábola; la de la velocidad, una recta inclinada, y la de la aceleración, una recta horizontal.

- 76** Las funciones que definen los ingresos y gastos de una empresa en millones de euros vienen dadas por:

$$I(x) = 6x - \frac{x^2}{2}$$

$$G(x) = \frac{x^2}{6} + 2x + 4$$

donde x es el número de miles de unidades vendidas.

Halla la función que obtiene los beneficios y calcula cuántas unidades tiene que producir para que los beneficios sean máximos.

Solución:

$$B(x) = I(x) - G(x)$$

$$B(x) = -\frac{2}{3}(x^2 - 6x + 6)$$

$$B'(x) = -\frac{4}{3}(x - 3)$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$B''(x) = -\frac{4}{3} < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

Se obtiene el máximo en 3 000 unidades producidas.

- 77** Una entidad financiera saca al mercado unos fondos de inversión que se rentabilizan anualmente, de acuerdo con la fórmula:

$$R(x) = -0,001x^2 + 0,08x + 5$$

donde x es la cantidad depositada en miles de euros y $R(x)$ es el tanto por ciento.

Calcula:

- La cantidad que se debe invertir para obtener la mejor rentabilidad.
- El tanto por ciento en el mejor de los casos.

Solución:

$$a) R'(x) = -0,002x + 0,08$$

$$R'(x) = 0 \Rightarrow x = 40$$

$$R''(x) = -0,002 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

Con 40 000 € se alcanza la máxima rentabilidad.

$$b) R(40) = 6,6\%$$

- 78** La población de una ciudad a partir del instante inicial ($t = 0$) sigue la función:

$$P(t) = \frac{t^2 + 400t + 1600}{(t + 40)^2}$$

donde t es el número de años, y $P(t)$, la población en millones de habitantes.

- ¿En qué año tendrá la ciudad el mayor número de habitantes?
- ¿Cuántos habitantes tendrá en ese momento?

Solución:

$$a) P'(t) = \frac{-320t + 12800}{(t + 40)^3}$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow t = 40$$

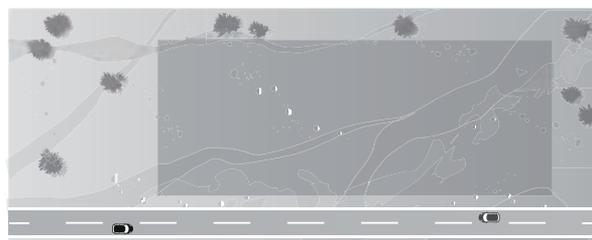
$$P''(t) = \frac{640t - 51200}{(t + 40)^4}$$

$$P''(40) = -\frac{1}{1600} < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

Se alcanza la máxima población a los 40 años.

$$b) P(40) = 3 \Rightarrow 3\,000\,000 \text{ habitantes.}$$

- 79** Una finca está al lado de una carretera y se quiere vallar el mayor rectángulo posible. El metro de valla junto a la carretera cuesta 5 €, y el resto, a 2 €. Halla el área del mayor recinto que se puede vallar con 2 800 €

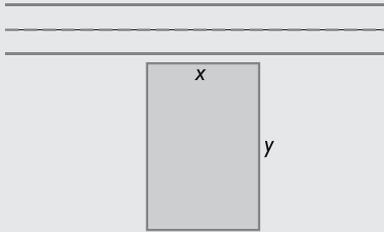


Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

 x = base del rectángulo. y = altura del rectángulo.

$$5x + 2x + 2y + 2y = 2800$$



b) Función que hay que maximizar.

$$A(x, y) = xy$$

Sujeta a las condiciones:

$$7x + 4y = 2800$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(x, y) = xy$$

$$7x + 4y = 2800 \Rightarrow y = \frac{2800 - 7x}{4}$$

$$A(x) = 700x - \frac{7}{4}x^2$$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$$A'(x) = 700 - \frac{7}{2}x$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 200$$

$$\text{Si } x = 200 \Rightarrow y = 350$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = -\frac{7}{2}$$

$$A''(200) = -\frac{7}{2} < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

f) El rectángulo tendrá al lado de la carretera 200 m y al otro lado 350 m, con un área de 70 000 m²

b) Función que hay que maximizar.

$$A(L, R) = \frac{1}{2}LR$$

Sujeta a las condiciones:

$$L + 2R = 24$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(L, R) = \frac{1}{2}LR$$

$$L + 2R = 24 \Rightarrow L = 24 - 2R$$

$$A(R) = 12R - R^2$$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$$A'(R) = 12 - 2R$$

$$A'(R) = 0 \Rightarrow R = 6$$

$$\text{Si } R = 6 \Rightarrow L = 12$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(R) = -2$$

$$A''(6) = -2 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

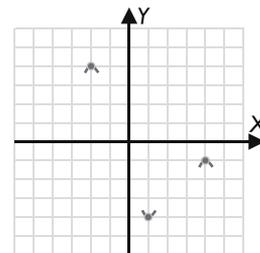
f) El jardín tendrá un radio de 6 m y una longitud de arco de 12 m, con un área de 36 m²

Para profundizar

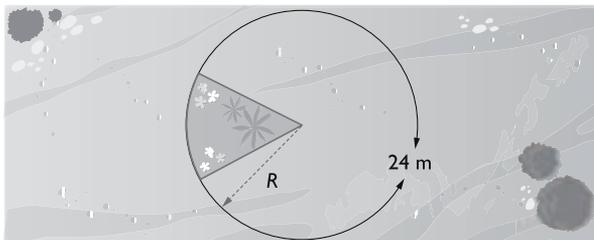
81 De una función polinómica se sabe que tiene un máximo relativo en el punto $A(-2, 4)$, un mínimo relativo en el punto $B(1, -4)$, otro máximo relativo en el punto $C(4, -1)$, y que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Con esta información, dibuja en tu cuaderno la gráfica a mano alzada.



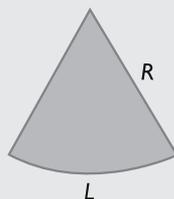
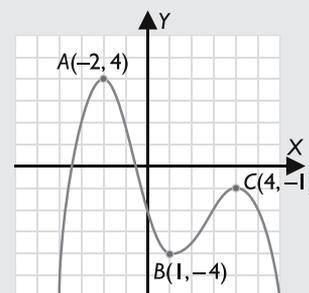
80 Un jardinero quiere construir un parterre (jardín pequeño) con forma de sector circular de área máxima. Halla el radio del parterre sabiendo que el perímetro mide 24 m

**Solución:**

a) Incógnitas, datos y dibujo.

 R = longitud del radio. L = longitud del arco.

$$\text{Perímetro} = 24 \text{ m}$$

**Solución:**

Ejercicios y problemas propuestos

82 Estudia el punto $P(0, 1)$ de la función polinómica:

$$y = x^4 + 1$$

Solución:

$$y' = 4x^3$$

$$y'(0) = 0$$

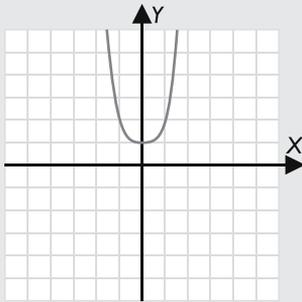
$$y'' = 12x^2$$

$$y''(0) = 0$$

$$y''' = 24x$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{IV} = 24 > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$$



83 Estudia si en el punto $O(0, 0)$ de la siguiente función polinómica tiene un punto de inflexión:

$$y = -x^4 - x$$

Solución:

$$y' = -4x^3 - 1$$

$$y'' = -12x^2$$

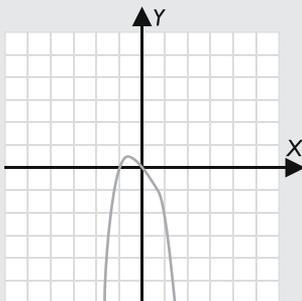
$$y''(0) = 0$$

$$y''' = -24x$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{IV} = -24 < 0 (-)$$

En $O(0, 0)$ no hay punto de inflexión.

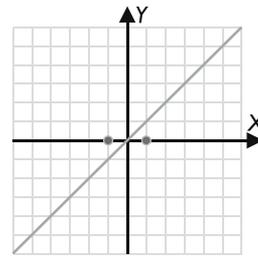


84 De una función racional se sabe que tiene como asíntotas $x = 0$ e $y = x$, corta al eje X en los puntos $A(1, 0)$ y $B(-1, 0)$, y que:

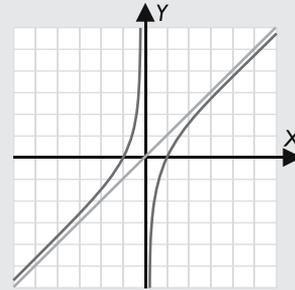
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

Con esta información, dibuja una gráfica a mano alzada.



Solución:



85 Estudia el punto $P(0, -1)$ de la siguiente función racional:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'(0) = 0$$

$$y'' = \frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

$$y''(0) < 0 (-) \Rightarrow (0, -1) \text{ Máximo relativo.}$$

86 Representa la siguiente función racional completando el formulario de los diez apartados.

$$y = \frac{1}{x^2}$$

Solución:

$$y' = -\frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de primera especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es par \Rightarrow Simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
 - Verticales: $x = 0$
 - Horizontales: $y = 0$
 - Oblicuas: no tiene.

7. Corte con los ejes:

- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: no lo corta.

Signo:

- Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Negativa (-): \emptyset

8. Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

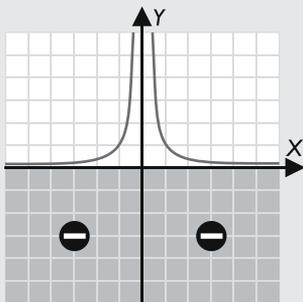
Monotonía:

- Creciente (\nearrow): $(-\infty, 0)$
- Decreciente (\searrow): $(0, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

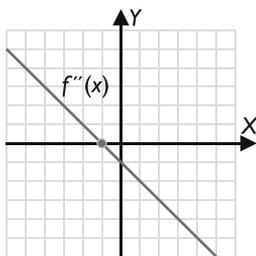
- Convexa (\cup): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Cóncava (\cap): \emptyset



10. Recorrido o imagen:

$$\text{Im}(f) = (0, +\infty)$$

87. Sea una función $f(x)$ tal que la gráfica de su segunda derivada $f''(x)$ es la recta siguiente:



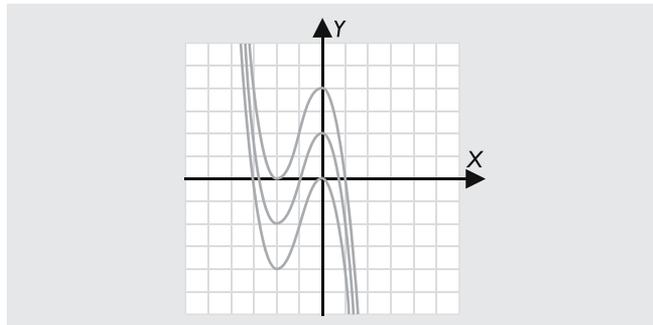
Calcula para $f(x)$:

- La curvatura.
- La abscisa del punto de inflexión.
- Haz una aproximación de una gráfica de $f(x)$

Solución:

- Convexa (\cup): $(-\infty, -1)$
Cóncava (\cap): $(-1, +\infty)$

- Tiene punto de inflexión en $x = -1$



88. Los gastos en euros de una empresa, en función del número de objetos que produce, vienen dados por la función:

$$G(x) = x^2 + 3x + 900$$

Se define el gasto medio como el gasto que cuesta producir un objeto, es decir:

$$GM(x) = \frac{G(x)}{x}$$

Calcula:

- El número de objetos que tiene que producir para que el gasto medio sea mínimo.
- El coste de cada pieza cuando el gasto medio sea mínimo.

Solución:

$$a) GM(x) = x + 3 + \frac{900}{x}$$

$$GM'(x) = 1 - \frac{900}{x^2}$$

$$GM'(x) = 0 \Rightarrow x = -30, x = 30$$

(El valor negativo no tiene sentido).

$$GM''(x) = \frac{1800}{x^3}$$

$$GM''(30) = \frac{1}{15} > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$$

$$b) GM(30) = 63 \text{ €}$$

89. Halla la función polinómica de tercer grado que pasa por el origen de coordenadas $O(0, 0)$, tiene un máximo relativo en el punto $P(-2, 4)$ y un punto de inflexión en $Q(-1, 2)$

Solución:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\text{Pasa por } O(0, 0) \Rightarrow d = 0$$

$$\text{Pasa por } P(-2, 4) \Rightarrow y(-2) = 4 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 4$$

$$\text{Pasa por } Q(-1, 2) \Rightarrow y(-1) = 2 \Rightarrow -a + b - c + d = 2$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\text{Máximo relativo en } P(-2, 4) \Rightarrow y'(-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a - 4b + c = 0$$

$$y'' = 6ax + 2b$$

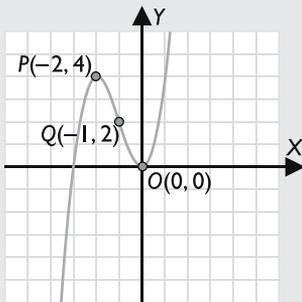
$$\text{Punto de inflexión en } Q(-1, 2) \Rightarrow y''(-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6a + 2b = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$a = 1, b = 3, c = 0, d = 0$$

$$y = x^3 + 3x^2$$



- 90** La función que halla el número de personas que visitan un parque de atracciones en verano, desde las 8 hasta las 20 horas, viene dada por:

$$f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 1250$$

Calcula:

- A qué hora hay más personas en el parque de atracciones.
- A qué hora hay menos personas en el parque de atracciones.

Solución:

$$f'(x) = 3x^2 - 90x + 600$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 20$$

$$f''(x) = 6x - 90$$

$$f''(10) = -30 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

$$f''(20) = 30 > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$$

- Hay más personas a las 10 horas.
- Hay menos personas a las 20 horas.

- 91** En una isla de Australia hay una plaga de conejos que sigue la función:

$$f(x) = \frac{500\,000}{x^2 - 50x + 626}$$

donde x representa el número de días.

Calcula:

- En qué día hay más conejos y cuántos hay.
- Con el paso del tiempo, ¿hacia dónde tiende a estabilizarse el número de conejos?

Solución:

$$a) y' = \frac{1\,000\,000(25 - x)}{(x^2 - 50x + 626)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 25$$

$$y'' = \frac{1\,000\,000(3x^2 - 150x + 1874)}{(x^2 - 50x + 626)^3}$$

$$y''(25) = -1\,000\,000 < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ Por tanto, se extinguen.

- 92** De todos los triángulos isósceles de perímetro 60 cm, halla el de área máxima.

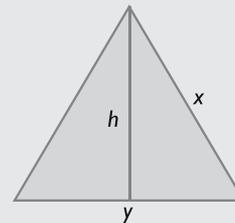
Solución:

- a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = lado desigual del triángulo.

y = lado igual.

Perímetro = 60 cm



- b) Función que hay que minimizar.

$$A(x, y) = \frac{1}{2} y \cdot h$$

Sujeta a las condiciones:

$$2x + y = 60$$

$$h^2 = x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

- c) Se escribe la función con una sola variable.

$$A(x) = (30 - x) \sqrt{60x - 900}$$

- d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$A'(x) = \frac{3\sqrt{15}(20 - x)}{\sqrt{x - 15}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 20$$

$$\text{Si } x = 20 \Rightarrow y = 20$$

- e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A(x) = \frac{3\sqrt{15}(10 - x)}{2(x - 15)\sqrt{x - 15}}$$

$$A''(20) = -3\sqrt{3} < 0 (-) \Rightarrow \text{Máximo relativo.}$$

- f) El triángulo de área máxima es el triángulo equilátero de 20 cm de lado.

- 93** Calcula un punto $P(x, y)$ de la parábola:

$$y = x^2$$

tal que su distancia al punto $A(0, 3)$ sea mínima.

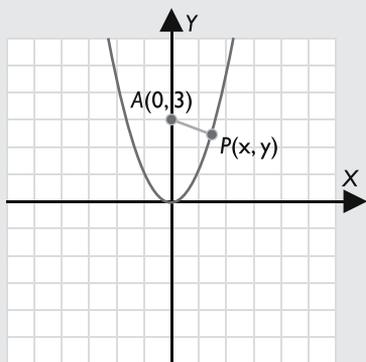
Solución:

- a) Incógnitas, datos y dibujo.

Punto incógnita: $P(x, y)$

Punto fijo: $A(0, 3)$

Parábola: $y = x^2$



b) Función que hay que minimizar.

$$d(A,P) = d(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Sujeta a las condiciones:

$$y = x^2$$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$$d(y) = \sqrt{y + (y-3)^2}$$

$$d(y) = \sqrt{y^2 - 5y + 9}$$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$d'(y) = \frac{2y-5}{2\sqrt{y^2-5y+9}}$$

$$d'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$

$$\text{Si } y = \frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{10}}{2}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$d''(y) = \frac{11}{4(y^2-5y+9)\sqrt{y^2-5y+9}}$$

$$d''\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{2\sqrt{11}}{11} > 0 (+) \Rightarrow \text{Mínimo relativo.}$$

f) Los puntos son:

$$P\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ y } Q\left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

SOLUCIONARIO BLOQUE III. GEOMETRÍA