

Unidad 7.

Trigonometría

1. Razones trigonométricas o circulares

Piensa y calcula

En una circunferencia de radio $R = 1$ m, calcula mentalmente y de forma exacta la longitud de:

- a) La circunferencia. b) La semicircunferencia. c) Un cuarto de circunferencia. d) Tres cuartos de circunferencia.

Solución:

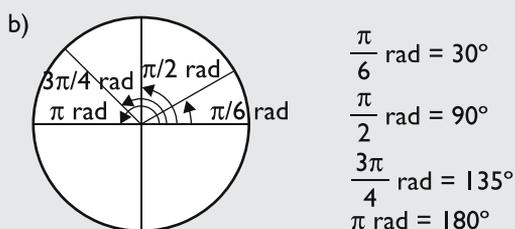
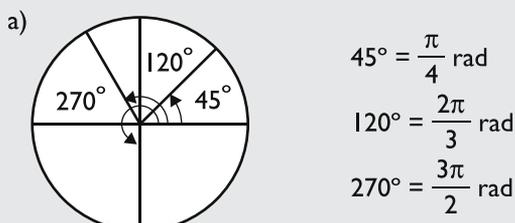
a) $L_{\text{Circunferencia}} = 2\pi$ m b) $L_{\text{Semicircunferencia}} = \pi$ m c) $L_{\text{Cuarto de circunferencia}} = \frac{\pi}{2}$ m d) $L_{\text{Tres cuartos de circunferencia}} = \frac{3\pi}{2}$ m

Aplica la teoría

1 Dibuja los siguientes ángulos y pasa mentalmente los que están en grados a radianes y viceversa:

- a) 45° , 120° , 270°
 b) $\frac{\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{2}$ rad, $\frac{3\pi}{4}$ rad, π rad

Solución:



2 Pasa los ángulos que están en grados a radianes y viceversa:

- a) 54° b) 217°
 c) $1,25$ rad d) $2,47$ rad

Solución:

a) $0,9425$ rad b) $3,7874$ rad
 c) $71^\circ 37' 11''$ d) $141^\circ 31' 14''$

3 Reduce a un ángulo menor de 360° los siguientes ángulos y escríbelos en forma general:

- a) 765° b) $2\ 345^\circ$ c) -540°

Solución:

a) $45^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$
 b) $185^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$
 c) $180^\circ + 360^\circ k$, $k \in \mathbb{Z}$

4 Calcula las siguientes razones trigonométricas y redondea el resultado a cuatro decimales:

- a) $\text{sen } 47^\circ 35' 44''$ b) $\text{cos } 73^\circ 15' 52''$
 c) $\text{tg } 25^\circ 5' 12''$ d) $\text{sen } 83^\circ 44' 23''$

Solución:

a) $0,7384$ b) $0,2880$ c) $0,4682$ d) $0,9940$

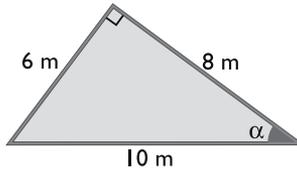
5 Calcula los siguientes ángulos en grados, minutos y segundos sabiendo que:

- a) $\text{sen } \alpha = 0,7634$ b) $\text{cos } \alpha = 0,1234$
 c) $\text{tg } \alpha = 2,5$ d) $\text{sen } \alpha = 0,8888$

Solución:

a) $\alpha = 49^\circ 45' 53''$
 b) $\alpha = 82^\circ 54' 42''$
 c) $\alpha = 68^\circ 11' 55''$
 d) $\alpha = 62^\circ 43' 22''$

- 6** Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α del triángulo rectángulo siguiente:



Solución:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

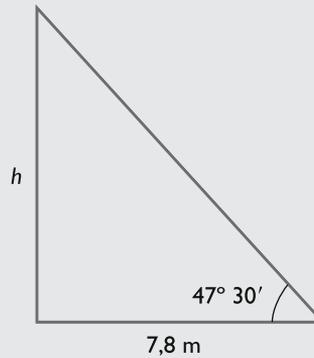
$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{4}{3}$$

- 7** Un árbol y su sombra forman un ángulo recto. La sombra mide 7,8 m y el ángulo con el que se ve la parte superior del árbol desde el extremo de la sombra mide $47^\circ 30'$. Calcula la altura del árbol.

Solución:



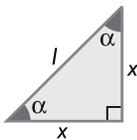
$$\operatorname{tg} 47^\circ 30' = \frac{h}{7,8}$$

$$h = 7,8 \operatorname{tg} 47^\circ 30' = 8,5 \text{ m}$$

2. Relaciones entre razones. Razones de 30° , 45° y 60°

Piensa y calcula

En el triángulo rectángulo e isósceles del dibujo, calcula mentalmente:



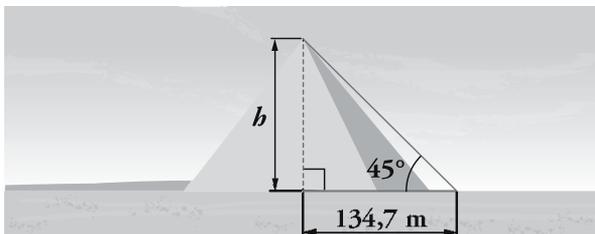
- a) El ángulo α
b) $\operatorname{tg} \alpha$

Solución:

- a) $\alpha = 45^\circ$ b) $\operatorname{tg} \alpha = 1$

Aplica la teoría

- 8** La pirámide de Kefrén, de Egipto, proyecta una sombra de 134,7 m y el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la parte más alta de la pirámide es de 45° . Halla mentalmente la altura de dicha pirámide.



Solución:

Altura = 134,7 m

- 9** Si $\operatorname{sen} \alpha = 0,3456$, calcula mentalmente $\operatorname{cos} (90^\circ - \alpha)$

Solución:

0,3456

- 10** Si $\operatorname{cos} 50^\circ = 0,6428$, calcula mentalmente $\operatorname{sen} 40^\circ$

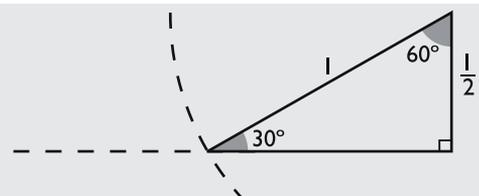
Solución:

0,6428

- 11** Sabiendo que $\operatorname{cos} \alpha = 1/2$, haz el dibujo del ángulo α y calcula mentalmente el valor de α

Solución:

$\alpha = 60^\circ$



12 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 2/3$, calcula $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental: $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

$$\frac{4}{9} + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha : \text{cos } \alpha = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

13 Sabiendo que $\text{cos } \alpha = 3/5$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental: $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$

$$\text{sen}^2 \alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha : \text{cos } \alpha = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$$

14 Sabiendo que $\text{tg } \alpha = 1/2$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$.

Solución:

$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \text{sec}^2 \alpha$$

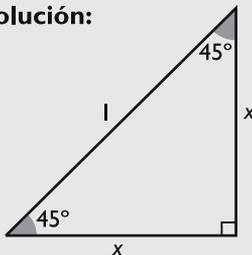
$$\frac{1}{4} + 1 = \text{sec}^2 \alpha \Rightarrow \text{sec } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\text{cos } \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha = \text{cos } \alpha \text{ tg } \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

15 Demuestra que $\text{tg } 45^\circ = 1$

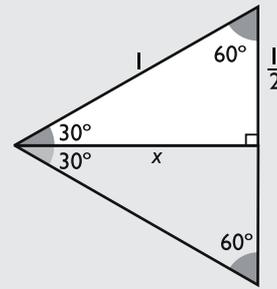
Solución:



$$\text{tg } 45^\circ = \frac{x}{x} = 1$$

16 Demuestra que $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:



$$x = \text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ$$

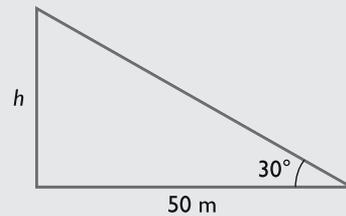
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Despejando x se obtiene que:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

17 Un faro proyecta una sombra de 50 m, y el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la parte más alta del faro es de 30° . Halla la altura del faro.

Solución:



$$\text{tg } 30^\circ = \frac{h}{50}$$

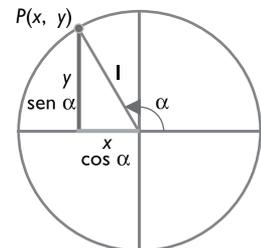
$$h = 50 \text{ tg } 30^\circ = 50 \frac{\sqrt{3}}{3} = 28,87 \text{ m}$$

3. Generalización de las razones trigonométricas

Piensa y calcula

Copia y completa la tabla con el signo de las abscisas y ordenadas en los cuatro cuadrantes:

	1.º	2.º	3.º	4.º
x	+			
y		+		



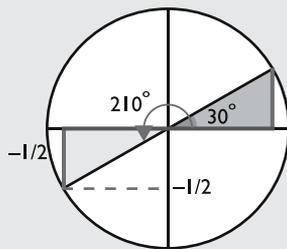
Solución:

	1.º	2.º	3.º	4.º
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

Aplica la teoría

- 18** Un ángulo α está en el 3.º cuadrante y se sabe que $\text{sen } \alpha = -1/2$. Dibuja el ángulo y calcula mentalmente el ángulo α , $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$

Solución:



$$\alpha = 210^\circ$$

$$\text{cos } 210^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 210^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 19** Copia y sustituye cada recuadro por \geq o \leq :

a) $|\text{sen } \alpha| \square 1$

b) $|\text{sec } \alpha| \square 1$

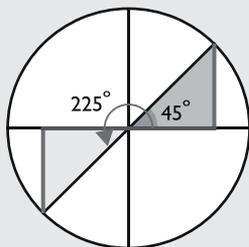
Solución:

a) $|\text{sen } \alpha| \leq 1$

b) $|\text{sec } \alpha| \geq 1$

- 20** Haz el dibujo y calcula mentalmente el seno, el coseno y la tangente de 225°

Solución:



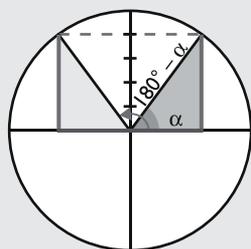
$$\text{sen } 225^\circ = -\text{sen } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 225^\circ = -\text{cos } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 225^\circ = \text{tg } 45^\circ = 1$$

- 21** Un ángulo α está en el 2.º cuadrante, y $\text{sen } \alpha = 4/5$. Haz el dibujo del ángulo α , halla $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$

Solución:

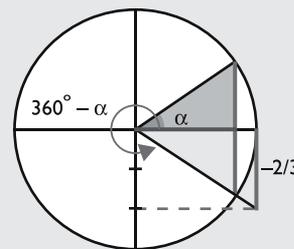


$$\text{cos } \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = -\frac{4}{3}$$

- 22** Un ángulo α está en el 4.º cuadrante, y $\text{tg } \alpha = -2/3$. Haz el dibujo del ángulo α , halla $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$

Solución:



$$\text{sen } \alpha = -\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

- 23** Calcula las siguientes razones trigonométricas redondeando el resultado a cuatro cifras decimales:

a) $\text{sen } 55^\circ 33' 44''$

b) $\text{cos } 163^\circ 25' 35''$

c) $\text{tg } 255^\circ 42' 13''$

d) $\text{sen } 344^\circ 33' 25''$

Solución:

a) 0,8247

b) -0,9585

c) 3,9242

d) -0,2663

- 24** Calcula el ángulo α en grados, minutos y segundos en los siguientes casos:

a) $\text{sen } \alpha = 0,5623$ y α está en el 1.º cuadrante.

b) $\text{cos } \alpha = -0,35$ y α está en el 2.º cuadrante.

c) $\text{tg } \alpha = 2,1$ y α está en el 3.º cuadrante.

d) $\text{sen } \alpha = -0,25$ y α está en el 4.º cuadrante.

Solución:

a) $\alpha = 34^\circ 12' 54''$

b) $\alpha = 110^\circ 29' 14''$

c) $\alpha = 244^\circ 32' 12''$

d) $\alpha = 345^\circ 31' 21''$

4. Fórmulas trigonométricas

Piensa y calcula

Calcula mentalmente:

a) $\text{sen } 60^\circ + \text{sen } 30^\circ$

b) $\text{sen } (60^\circ + 30^\circ)$

c) $2 \cdot \cos 45^\circ$

d) $\cos (2 \cdot 45^\circ)$

Solución:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{b) } \text{sen } 90^\circ = 1$$

$$\text{c) } 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{d) } \cos 90^\circ = 0$$

Aplica la teoría

25 Calcula $\text{sen } 75^\circ$

Solución:

$$\text{sen } 75^\circ = \text{sen } (45^\circ + 30^\circ) =$$

$$= \text{sen } 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \text{sen } 30^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}$$

26 Calcula $\text{tg } 15^\circ$

Solución:

$$\text{tg } 15^\circ = \text{tg } (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\text{tg } 45^\circ - \text{tg } 30^\circ}{1 + \text{tg } 45^\circ \text{tg } 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

27 Si $\text{sen } \alpha = 0,3$, calcula $\cos 2\alpha$

Solución:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

En primer lugar hay que calcular $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = 0,9539$$

$$\cos 2\alpha = 0,9539^2 - 0,3^2 = 0,8199$$

28 Si $\cos \alpha = 0,6$, calcula $\text{tg } \alpha/2$

Solución:

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0,6}{1 + 0,6}}$$

$$\text{tg } \frac{\alpha}{2} = \pm 0,5$$

29 Calcula $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

Solución:

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \text{sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \text{sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2 \text{sen } 45^\circ \text{sen } 30^\circ =$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

30 Si $\text{sen } \alpha = 1/3$, calcula $\text{sen } (\alpha + 30^\circ)$

Solución:

$$\text{sen } (\alpha + 30^\circ) = \text{sen } \alpha \cos 30^\circ + \cos \alpha \text{sen } 30^\circ$$

En primer lugar hay que calcular $\cos \alpha$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{sen } (\alpha + 30^\circ) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$$

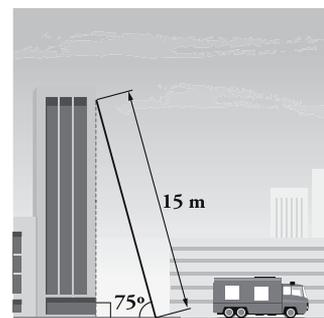
31 Si $\text{tg } \alpha = 2/3$, calcula $\text{tg } (60^\circ - \alpha)$

Solución:

$$\text{tg } (60^\circ - \alpha) = \frac{\text{tg } 60^\circ - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } 60^\circ \text{tg } \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 2/3}{1 + \sqrt{3} \cdot 2/3} = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$$

32 Una escalera de bomberos está apoyada sobre la fachada de una casa; la escalera mide 15 m de longitud y el ángulo que forma con el suelo es de 75° . Calcula la altura a la que llegará la escalera en la casa.



Solución:

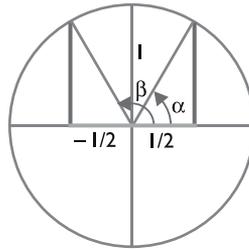
$$\text{sen } 75^\circ = \frac{h}{15}$$

$$h = 15 \cdot \text{sen } 75^\circ = 14,49 \text{ m}$$

5. Ecuaciones e identidades trigonométricas

Piensa y calcula

Observando el dibujo y sabiendo que $\cos \alpha = 1/2$, $\cos \beta = -1/2$, calcula mentalmente cuánto miden los ángulos α y β



Solución:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\beta = 120^\circ$$

Aplica la teoría

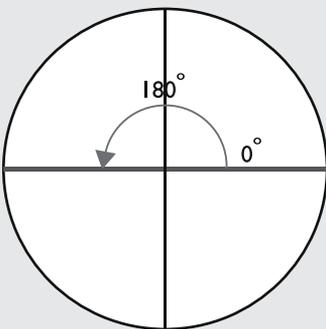
33 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) $\sin x = 0$

b) $\cos x = -1$

Solución:

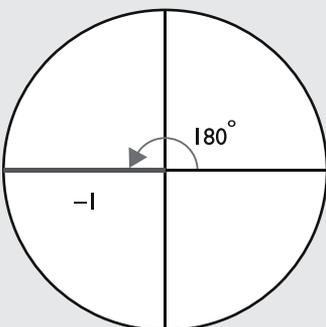
a)



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)



$$x = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

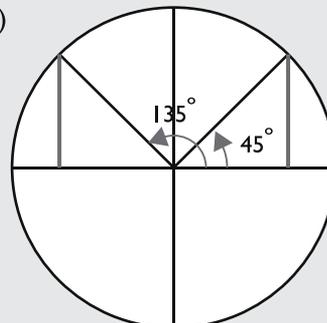
34 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

Solución:

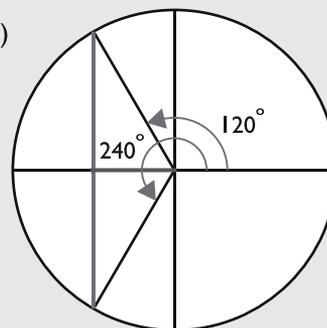
a)



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b)



$$x_1 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

35 Resuelve la siguiente ecuación:

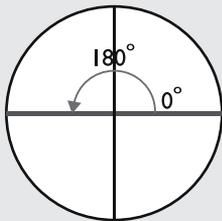
$$\sin^2 x = \sin x$$

Solución:

$$\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0$$

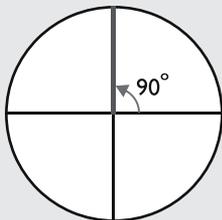
$$\sin x = 0, \sin x = 1$$

Si $\sin x = 0$



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\sin x = 1$



$$x_3 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

36 Resuelve la siguiente ecuación:

$$2 \cos^2 x - \sin x = 1$$

Solución:

$$2 \cos^2 x - \sin x = 1$$

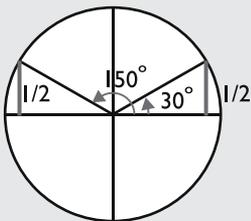
$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1$$

$$2 - 2 \sin^2 x - \sin x = 1$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \sin x = -1$$

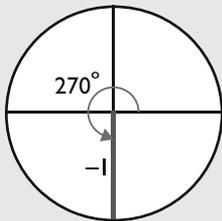
$$\text{Si } \sin x = \frac{1}{2}$$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\sin x = -1$



$$x_3 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

37 Resuelve la siguiente ecuación:

$$1 + \sec^2 x = 3 \operatorname{tg}^2 x$$

Solución:

$$1 + \sec^2 x = 3 \operatorname{tg}^2 x$$

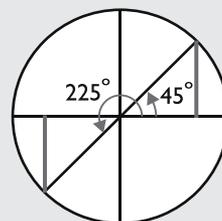
$$\text{Se aplica que: } \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x + 1 = 3 \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1$$

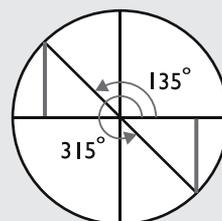
$$\operatorname{tg} x = \pm 1$$

Si $\operatorname{tg} x = 1$



$$x_1 = 45^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\operatorname{tg} x = -1$



$$x_3 = 135^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

38 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\operatorname{cosec}^2 x = 2 \operatorname{cotg}^2 x$$

Solución:

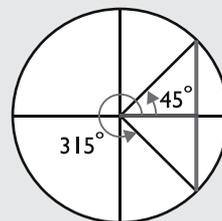
$$\operatorname{cosec}^2 x = 2 \operatorname{cotg}^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$2 \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

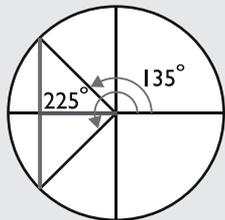
$$\text{Si } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x_3 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

39 Comprueba la siguiente identidad:

$\text{tg}^2 x - \text{sen}^2 x = \text{tg}^2 x \text{sen}^2 x$

Solución:

Se hacen operaciones en cada uno de los dos miembros.

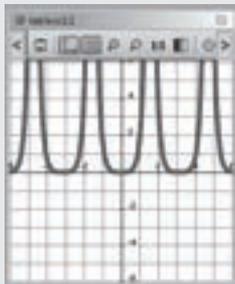
En el 1.º miembro:

$$\begin{aligned} \text{tg}^2 x - \text{sen}^2 x &= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \text{sen}^2 x = \\ &= \frac{\text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

En el 2.º miembro:

$$\text{tg}^2 x \text{sen}^2 x = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} \text{sen}^2 x = \frac{\text{sen}^4 x}{\cos^2 x}$$

La representación gráfica es:



40 Comprueba la siguiente identidad:

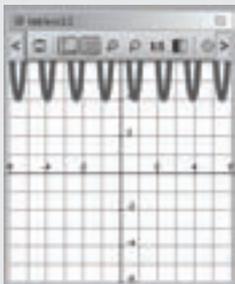
$\text{sec}^2 x + \text{cosec}^2 x = \text{sec}^2 x \text{cosec}^2 x$

Solución:

Haciendo operaciones en el 1.º miembro se obtiene el 2.º miembro:

$$\begin{aligned} \text{sec}^2 x + \text{cosec}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\text{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \text{cosec}^2 x \text{sec}^2 x \end{aligned}$$

La representación gráfica es:



41 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

$$\begin{cases} \text{a) } \text{sen } x + \text{sen } y = 1 \\ \text{sen } x - \text{sen } y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{b) } \text{sen}^2 x + \cos^2 y = \frac{5}{4} \\ \text{sen}^2 x - \cos^2 y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Solución:

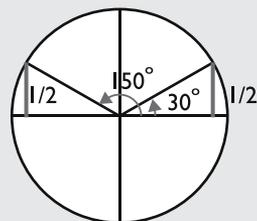
a) Sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$2 \text{sen } x = 1$

Si $\text{sen } x = \frac{1}{2}$

$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



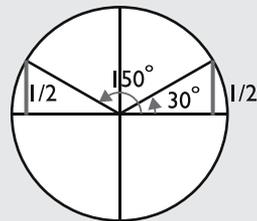
Restando de la 1.ª ecuación la 2.ª, se obtiene:

$2 \text{sen } y = 1$

Si $\text{sen } y = \frac{1}{2}$

$y_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$y_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



b) Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

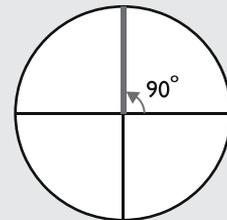
$2 \text{sen}^2 x = 2$

$\text{sen}^2 x = 1$

$\text{sen } x = \sqrt{1} = \pm 1$

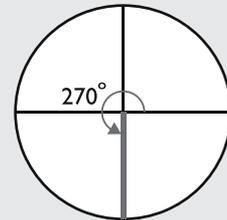
Si $\text{sen } x = 1$

$x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



Si $\text{sen } x = -1$

$x_2 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



Restando las dos ecuaciones, se obtiene:

$2 \cos^2 y = \frac{1}{2}$

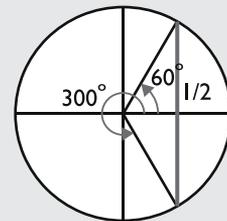
$\cos^2 y = \frac{1}{4}$

$\cos y = \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2}$

Si $\cos y = \frac{1}{2}$

$y_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

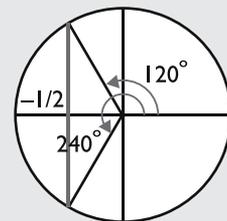
$y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



Si $\cos y = -\frac{1}{2}$

$y_3 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

$y_4 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$



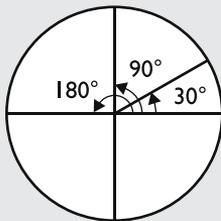
Ejercicios y problemas propuestos

Ejercicios propuestos

1. Razones trigonométricas o circulares

42 Dibuja los siguientes ángulos y pasa mentalmente de grados a radianes: 30° , 90° y 180°

Solución:



$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

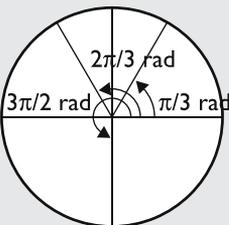
$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$180^\circ = \pi \text{ rad}$$

43 Dibuja los siguientes ángulos y pasa mentalmente de radianes a grados:

$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} \quad \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \quad \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Solución:



$$\frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2} \text{ rad} = 270^\circ$$

44 Pasa de grados a radianes los siguientes ángulos:
a) 47° b) 319°

Solución:

a) 0,8203 rad b) 5,5676 rad

45 Pasa de radianes a grados los siguientes ángulos:
a) 0,85 rad b) 1,23 rad

Solución:

a) $48^\circ 42' 5''$ b) $70^\circ 28' 26''$

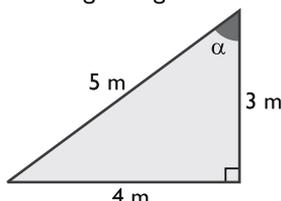
46 Reduce a un ángulo menor de 360° los siguientes ángulos y escríbelos en forma general:

a) 900° b) $25\,647^\circ$ c) $-1\,755^\circ$

Solución:

a) $180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
b) $87^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
c) $45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

47 Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α del triángulo rectángulo siguiente:



Solución:

$$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5} \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{sec } \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{4}{3} \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{3}{4}$$

48 Calcula las siguientes razones trigonométricas y redondea el resultado a cuatro decimales:

a) $\text{sen } 55^\circ 33' 22''$ b) $\text{cos } 87^\circ 5' 2''$
c) $\text{tg } 45^\circ 15' 25''$ d) $\text{sen } 18^\circ 11' 20''$

Solución:

a) 0,8247 b) 0,0509
c) 1,0090 d) 0,3122

49 Calcula los ángulos en grados, minutos y segundos sabiendo que:

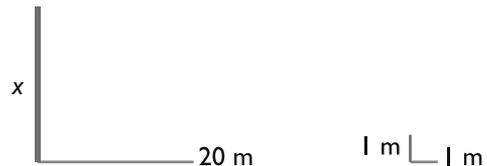
a) $\text{sen } \alpha = 0,4444$ b) $\text{cos } \alpha = 0,6703$
c) $\text{tg } \alpha = 0,5$ d) $\text{sen } \alpha = 0,9876$

Solución:

a) $\alpha = 26^\circ 23' 6''$ b) $\alpha = 47^\circ 54' 35''$
c) $\alpha = 26^\circ 33' 54''$ d) $\alpha = 80^\circ 58' 4''$

2. Relaciones entre razones. Razones de 30° , 45° y 60°

50 Un sabio llamado Thales de Mileto se acerca a la gran esfinge de Egipto con un bastón de 1 m de altura, se sienta en una piedra y pone el bastón vertical al suelo. Espera hasta que la sombra es igual de larga que el bastón. En ese momento mide la longitud de la sombra de la esfinge y obtiene 20 m. Calcula mentalmente cuánto mide de alto dicha esfinge.



Solución:

Altura = 20 m

51 Sabiendo que $\text{cos } \alpha = 0,7777$, calcula mentalmente el valor de $\text{sen } (90^\circ - \alpha)$

Solución:

0,7777

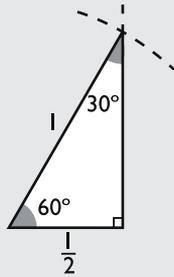
52 Sabiendo que $\text{sen } 50^\circ = 0,7660$, calcula mentalmente el valor de $\text{cos } 40^\circ$

Solución:

0,7660

53 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 1/2$, haz el dibujo del ángulo α y calcula mentalmente el valor de α

Solución:



$$\alpha = 30^\circ$$

54 Sabiendo que $\text{sen } \alpha = 4/5$, calcula $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\frac{16}{25} + \text{cos}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \text{cos } \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha : \text{cos } \alpha = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$$

55 Sabiendo que $\text{cos } \alpha = 2/5$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental:

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \frac{4}{25} = 1 \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha : \text{cos } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} : \frac{2}{5} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

56 Sabiendo que $\text{tg } \alpha = 5/12$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$

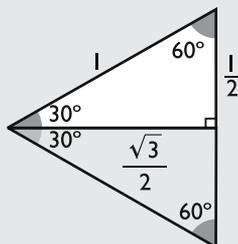
Solución:

$$\text{cos } \alpha = \frac{12}{13}, \text{sen } \alpha = \frac{5}{13}$$

57 Demuestra que:

$$\text{a) } \text{tg } 60^\circ = \text{cotg } 30^\circ = \sqrt{3} \quad \text{b) } \text{tg } 30^\circ = \text{cotg } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solución:



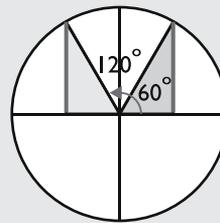
$$\text{tg } 60^\circ = \text{sen } 60^\circ : \text{cos } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$\text{tg } 30^\circ = \text{sen } 30^\circ : \text{cos } 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

3. Generalización de las razones trigonométricas

58 Un ángulo α está en el segundo cuadrante y es tal que $\text{cos } \alpha = -1/2$. Dibuja el ángulo y calcula mentalmente el ángulo α , el $\text{sen } \alpha$ y la $\text{tg } \alpha$

Solución:



$$\alpha = 120^\circ$$

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 120^\circ = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3}$$

59 Copia y sustituye los recuadros por el signo correspondiente:

$$\text{a) } |\text{cos } \alpha| \quad \square \quad 1 \quad \text{b) } |\text{cosec } \alpha| \quad \square \quad 1$$

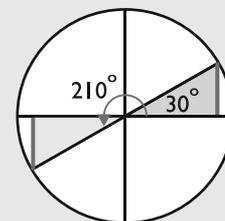
Solución:

$$\text{a) } |\text{cos } \alpha| \leq 1$$

$$\text{b) } |\text{cosec } \alpha| \geq 1$$

60 Haz el dibujo y calcula mentalmente seno, coseno y tangente de 210°

Solución:



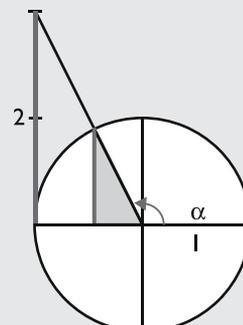
$$\text{sen } 210^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 210^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 210^\circ = \text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

61 Un ángulo α está en el 2.º cuadrante y es tal que $\text{tg } \alpha = -2$. Haz el dibujo del ángulo α ; halla $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$

Solución:



$$\text{tg}^2 \alpha + 1 = \text{sec}^2 \alpha$$

$$4 + 1 = \text{sec}^2 \alpha$$

$$\text{sec } \alpha = -\sqrt{5} \Rightarrow \text{cos } \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

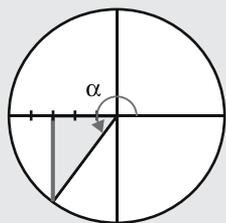
$$\text{tg } \alpha = \text{sen } \alpha : \text{cos } \alpha$$

$$\text{sen } \alpha = \text{tg } \alpha \text{ cos } \alpha$$

$$\text{sen } \alpha = -2 \left(-\frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- 62** Un ángulo α está en el 3.º cuadrante, y $\cos \alpha = -3/5$. Haz el dibujo del ángulo α ; halla $\sin \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$

Solución:



$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha = -\frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$$

- 63** Calcula las siguientes razones trigonométricas y redondea el resultado a cuatro cifras decimales:

- $\sin 256^\circ 23' 5''$
- $\cos 12^\circ 20' 30''$
- $\operatorname{tg} 157^\circ 13' 10''$
- $\cos 325^\circ 26' 27''$

Solución:

- | | |
|--------------|-------------|
| a) $-0,9719$ | b) $0,9769$ |
| c) $-0,4200$ | d) $0,8235$ |

- 64** Calcula el ángulo α en grados, minutos y segundos en los siguientes casos:

- $\sin \alpha = 0,2020$ y α está en el 1.º cuadrante.
- $\operatorname{tg} \alpha = -3,1415$ y α está en el 2.º cuadrante.
- $\cos \alpha = -0,6$ y α está en el 3.º cuadrante.
- $\sin \alpha = -0,8325$ y α está en el 4.º cuadrante.

Solución:

- $\alpha = 11^\circ 39' 14''$
- $\alpha = 107^\circ 39' 26''$
- $\alpha = 233^\circ 7' 48''$
- $\alpha = 303^\circ 38' 37''$

4. Fórmulas trigonométricas

- 65** Calcula $\cos 75^\circ$

Solución:

$$\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) =$$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

- 66** Calcula $\sin 15^\circ$

Solución:

$$\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

- 67** Sabiendo que $\cos \alpha = 0,6$, calcula $\sin 2\alpha$

Solución:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

En primer lugar hay que calcular $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = 0,8$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$$

- 68** Sabiendo que $\cos \alpha = 0,4$, calcula $\operatorname{tg} \alpha/2$

Solución:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0,4}{1+0,4}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm 0,6547$$

- 69** Calcula $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$

Solución:

$$\cos 15^\circ + \cos 75^\circ = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= 2 \cos 45^\circ \cos (-60^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- 70** Sabiendo que $\cos \alpha = 0,6$, calcula $\sin (60^\circ - \alpha)$

Solución:

$$\sin (60^\circ - \alpha) = \sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha$$

En primer lugar hay que calcular $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = 0,8$$

$$\sin (60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,6 - \frac{1}{2} \cdot 0,8 = 0,1196$$

- 71** Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = 5/4$, calcula $\operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ)$

Solución:

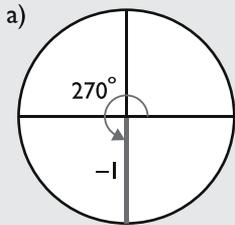
$$\operatorname{tg} (\alpha - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{5/4 - 1}{1 + 5/4 \cdot 1} = \frac{1}{9}$$

5. Ecuaciones e identidades trigonométricas

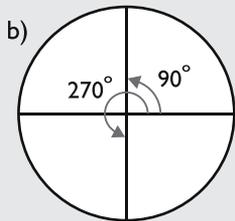
72 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) $\text{sen } x = -1$ b) $\text{cos } x = 0$

Solución:



$$x = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

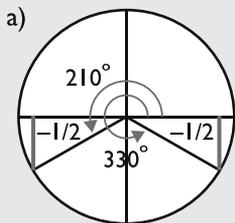


$$\begin{aligned} x_1 &= 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

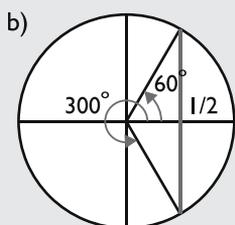
73 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$ b) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:



$$\begin{aligned} x_1 &= 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_1 &= 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

74 Resuelve la siguiente ecuación: $2 \cos x = \sec x$

Solución:

$$2 \cos x = \sec x$$

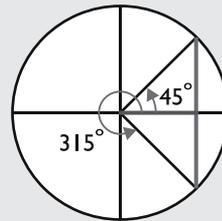
$$2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$2 \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

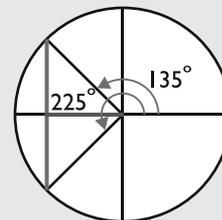
Si $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$x_1 = 45^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$$x_3 = 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 225^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

75 Resuelve la siguiente ecuación: $2 \text{sen}^2 x + \cos x = 1$

Solución:

$$2 \text{sen}^2 x + \cos x = 1$$

Se aplica que: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

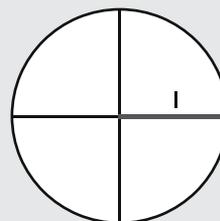
$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x = 1$$

$$2 - 2 \cos^2 x + \cos x = 1$$

$$2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

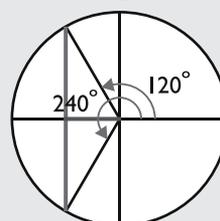
$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{or} \quad \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

Si $\cos x = 1$



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\cos x = -\frac{1}{2}$



$$x_2 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

76 Resuelve la siguiente ecuación: $\cos x = \sin 2x$

Solución:

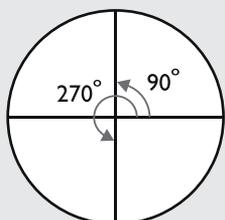
$$\cos x = \sin 2x$$

$$\cos x = 2 \sin x \cos x$$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x(2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

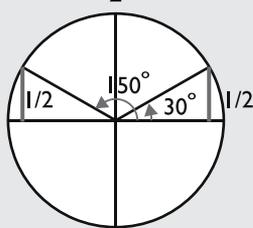
Si $\cos x = 0$



$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\sin x = \frac{1}{2}$



$$x_3 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, x_4 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

77 Resuelve la siguiente ecuación: $\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$

Solución:

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$$

Se aplica la fórmula: $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

$$\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2(\operatorname{tg}^2 x + 1)$$

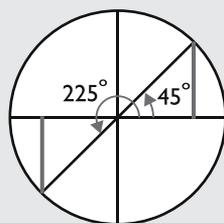
$$\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2 \operatorname{tg}^2 x + 2$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \pm 1$$

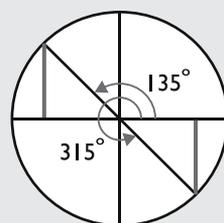
Si $\operatorname{tg} x = 1$

$$x_1 = 45^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



Si $\operatorname{tg} x = -1$

$$x_3 = 135^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$



78 Comprueba la siguiente identidad:

$$\cos x + \sec x = \sec x (1 + \cos^2 x)$$

Solución:

Se hacen operaciones en cada uno de los dos miembros.

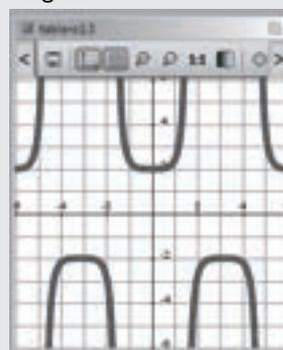
En el 1.º miembro:

$$\cos x + \sec x = \cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x}$$

En el 2.º miembro:

$$\sec x(1 + \cos^2 x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos x}$$

La representación gráfica es:



79 Comprueba la siguiente identidad:

$$\operatorname{tg} x = \cos 2x (\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x)$$

Solución:

Haciendo operaciones en el 2.º miembro se obtiene el 1.º.

$$\cos 2x (\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x) = \cos 2x \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x \right) =$$

$$= \cos 2x \left(\frac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) =$$

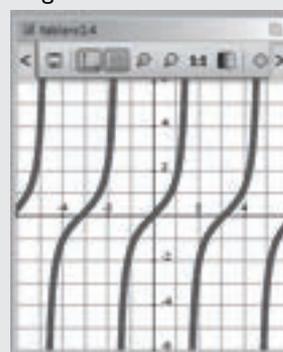
$$= \cos 2x \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \right) = \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \cancel{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos 2x}} =$$

$$= \operatorname{tg} x$$

La representación gráfica es:



80 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

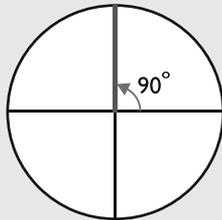
$$\begin{cases} \text{a) } \left. \begin{aligned} \text{sen } x + \cos y &= \frac{3}{2} \\ 3 \text{ sen } x - 2 \cos y &= 2 \end{aligned} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{aligned} \text{sen } x + \cos y &= 1 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 y &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \end{cases}$$

Solución:

a) Se multiplica la 1.ª ecuación por 2 y se suman. Se obtiene:

$$5 \text{ sen } x = 5$$

$$\text{sen } x = 1$$

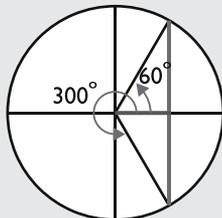


$$x = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Se multiplica la 1.ª ecuación por 3 y se le resta la 2.ª. Se obtiene:

$$5 \cos y = \frac{5}{2}$$

$$\cos y = \frac{1}{2}$$



$$y_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

b) Haciendo: $\text{sen } x = u$, $\cos y = v$, se tiene:

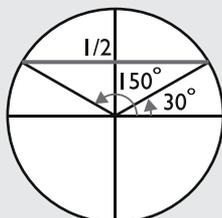
$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$u = \frac{1}{2}, v = \frac{1}{2}$$

Luego:

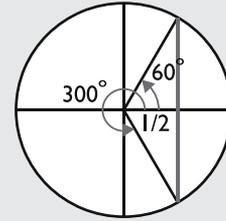
$$\text{sen } x = \frac{1}{2}$$



$$x_1 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos y = \frac{1}{2}$$



$$y_1 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

81 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas y da las soluciones en $[0, \pi/2]$:

$$\begin{cases} \text{a) } \left. \begin{aligned} \text{sen } x \cdot \cos y &= \frac{3}{4} \\ \text{sen } y \cdot \cos x &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{b) } \left. \begin{aligned} 4y \text{ sen } x \cos x &= 3 \\ 2y \cos 2x &= \sqrt{3} \end{aligned} \right\} \end{cases}$$

Solución:

a) Sumando las dos ecuaciones, se tiene:

$$\text{sen}(x + y) = 1$$

Restando las dos ecuaciones, se tiene:

$$\text{sen}(x - y) = \frac{1}{2}$$

De donde se tiene:

$$\begin{cases} x + y = 90^\circ \\ x - y = 30^\circ \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

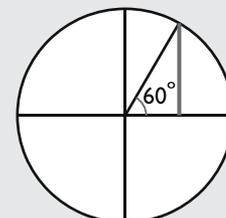
$$x = 60^\circ, y = 30^\circ$$

b) Como $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$, se tiene:

$$\begin{cases} 2y \text{ sen } 2x = 3 \\ 2y \cos 2x = \sqrt{3} \end{cases}$$

Dividiendo la 1.ª ecuación entre la 2.ª ecuación:

$$\text{tg } 2x = \sqrt{3} \quad (\text{solo se toman las soluciones de } [0, \pi/2])$$



$$2x = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 30^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

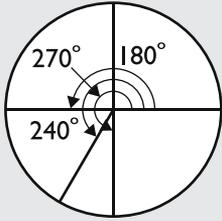
$$y = \sqrt{3}$$

Para ampliar

82 Dibuja los siguientes ángulos y pasa de grados a radianes de modo exacto:

$$180^\circ \quad 240^\circ \quad 270^\circ$$

Solución:

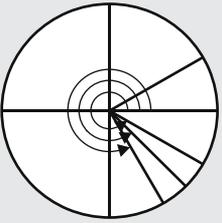


$$\begin{aligned} 180^\circ &= \pi \text{ rad} \\ 240^\circ &= \frac{4\pi}{3} \text{ rad} \\ 270^\circ &= \frac{3\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned}$$

83 Dibuja los siguientes ángulos y pasa de radianes a grados de modo exacto:

$$\frac{5\pi}{3} \text{ rad} \quad \frac{7\pi}{4} \text{ rad} \quad \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

Solución:



$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{3} \text{ rad} &= 300^\circ \\ \frac{7\pi}{4} \text{ rad} &= 315^\circ \\ \frac{11\pi}{6} \text{ rad} &= 330^\circ \end{aligned}$$

84 Reduce los siguientes ángulos a ángulos comprendidos entre 0° y 360° . Escríbelos en forma general:

- a) -30° b) -150°
c) -600° d) -2500°

Solución:

- a) $330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
b) $210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
c) $120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
d) $20^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

85 Reduce los siguientes ángulos a ángulos comprendidos entre 0 rad y 2π rad. Escríbelos en forma general:

- a) $-\frac{13\pi}{2}$ rad
b) $-\frac{83\pi}{3}$ rad

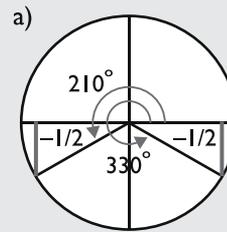
Solución:

- a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
b) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

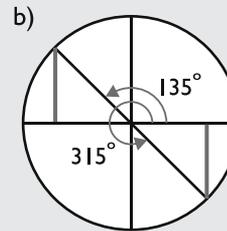
86 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

- a) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$
b) $\text{tg } x = -1$

Solución:



$$\begin{aligned} x_1 &= 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

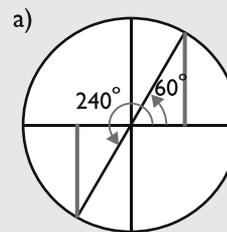


$$\begin{aligned} x_1 &= 135^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 315^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

87 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

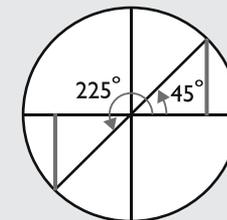
- a) $\text{tg } x = \sqrt{3}$ b) $\text{cotg } x = 1$

Solución:



$$x_1 = 60^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

- b) $\text{cotg } x = 1 \Rightarrow \text{tg } x = 1$



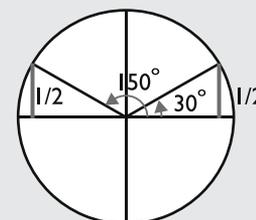
$$x_1 = 45^\circ + 180^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

88 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

- a) $\text{cosec } x = 2$
b) $\text{sec } x = -2$

Solución:

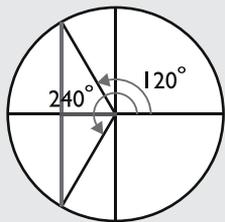
- a) $\text{cosec } x = 2 \Rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2}$



$$\begin{aligned} x_1 &= 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejercicios y problemas propuestos

b) $\sec x = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$



$$x_1 = 120^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 240^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

89 Calcula en radianes el menor ángulo que forman las agujas de un reloj cuando marcan:

- Las 3 h en punto.
- Las 5 h en punto.
- Las 8 h en punto.
- Las 11 h en punto.

Solución:

- $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{5\pi}{6}$
- $\frac{2\pi}{3}$
- $\frac{\pi}{6}$

90 La longitud de una circunferencia mide 32 cm. Calcula en grados las amplitudes de los siguientes arcos:

- Arco de longitud 4 m
- Arco de longitud 8 m
- Arco de longitud 16 m
- Arco de longitud 24 m

Solución:

- 45°
- 90°
- 180°
- 270°

91 Sin utilizar la calculadora, halla:

- $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ$
- $\operatorname{tg} 45^\circ - \sin 60^\circ + \cos 30^\circ$

Solución:

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$
- $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$

92 Sin utilizar la calculadora, halla:

- $\sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$
- $\cos \frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}$

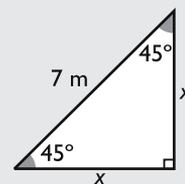
Solución:

- $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$
- $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

93 Un triángulo rectángulo es isósceles, y la hipotenusa mide de 7 m. Calcula cuánto miden los catetos y su área.

Solución:

$$\sin 45^\circ = \frac{x}{7} \Rightarrow x = 7 \sin 45^\circ = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$



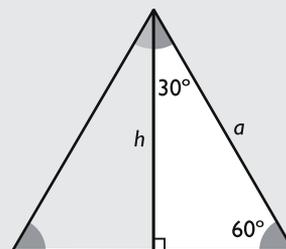
$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = \frac{49}{4} = 12,25 \text{ m}^2$$

94 Deduce las fórmulas de las áreas de los siguientes poliedros regulares:

- Tetraedro.
- Octaedro.
- Icosaedro.

Solución:

Previamente se calcula el área de un triángulo equilátero:



$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin 60^\circ$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Área de un triángulo equilátero:

$$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

a) Tetraedro

$$A_{\text{Tetraedro}} = a^2\sqrt{3}$$

b) Octaedro

$$A_{\text{Octaedro}} = 2a^2\sqrt{3}$$

c) Icosaedro

$$A_{\text{Icosaedro}} = 5a^2\sqrt{3}$$

95 Copia y completa la siguiente tabla escribiendo el signo:

	1.º	2.º	3.º	4.º
sen α				
cos α				
tg α				

Solución:

	1.º	2.º	3.º	4.º
sen α	+	+	-	-
cos α	+	-	-	+
tg α	+	-	+	-

96 Calcula mentalmente el valor de los siguientes ángulos:

- a) $\text{sen } \alpha = 0$
- b) $\text{sen } \alpha = 1$
- c) $\text{cos } \alpha = 0$
- d) $\text{cos } \alpha = 1$

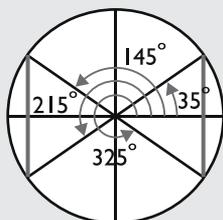
Solución:

- a) $\alpha_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
 $\alpha_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- b) $\alpha = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- c) $\alpha_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
 $\alpha_2 = 270^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$
- d) $\alpha = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$

97 Sabiendo que $\text{sen } 35^\circ = 0,5736$, representa el ángulo α de forma aproximada y calcula mentalmente:

- a) $\text{sen } 145^\circ$
- b) $\text{sen } 215^\circ$
- c) $\text{sen } (-35^\circ)$

Solución:



- a) 0,5736
- b) -0,5736
- c) -0,5736

98 Sin utilizar la calculadora, halla:

- a) $\text{sen } 330^\circ + \text{cos } 240^\circ - \text{tg } 150^\circ$
- b) $\text{tg } 120^\circ - \text{sen } 240^\circ + \text{cos } 315^\circ$

Solución:

- a) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$
- b) $-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

99 Sin utilizar la calculadora, halla:

- a) $\text{sen } \frac{2\pi}{3} + \text{cos } \frac{5\pi}{6} - \text{tg } \frac{7\pi}{4}$
- b) $\text{cos } \frac{5\pi}{4} - \text{tg } \frac{4\pi}{3} + \text{sen } \frac{5\pi}{4}$

Solución:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$
- b) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$

100 Sabiendo que $\text{cos } \alpha = 1/4$, calcula $\text{cos } (\alpha + 60^\circ)$

Solución:

$$\text{cos } (\alpha + 60^\circ) = \text{cos } \alpha \text{cos } 60^\circ - \text{sen } \alpha \text{sen } 60^\circ$$

En primer lugar hay que calcular $\text{sen } \alpha$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{cos } (\alpha + 60^\circ) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{8}$$

101 Sabiendo que $\text{tg } \alpha = 3/4$, calcula $\text{tg } (30^\circ - \alpha)$

Solución:

$$\text{tg } (30^\circ - \alpha) = \frac{\text{tg } 30^\circ - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } 30^\circ \text{tg } \alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}/3 - 3/4}{1 + \sqrt{3}/3 \cdot 3/4} = \frac{25\sqrt{3} - 48}{39}$$

102 Resuelve la siguiente ecuación: $\text{cos } 2x = 2 - 3 \text{sen } x$

Solución:

$$\text{cos } 2x = 2 - 3 \text{sen } x$$

Se aplica que: $\text{cos } 2x = \text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x$

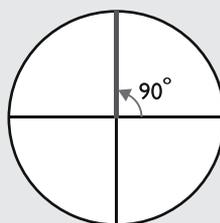
$$\text{cos}^2 x - \text{sen}^2 x = 2 - 3 \text{sen } x$$

$$1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = 2 - 3 \text{sen } x$$

$$2 \text{sen}^2 x - 3 \text{sen } x + 1 = 0$$

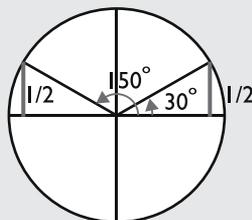
$$\text{sen } x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si $\text{sen } x = 1$



$$x_1 = 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\text{sen } x = \frac{1}{2}$



$$x_2 = 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

103 Resuelve la siguiente ecuación: $\text{tg } x = 2 \text{sen } x$

Solución:

$$\text{tg } x = 2 \text{sen } x$$

$$\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} = 2 \text{sen } x$$

$$\text{sen } x = 2 \text{sen } x \text{cos } x$$

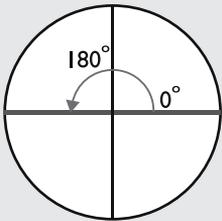
Ejercicios y problemas propuestos

$$2 \operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen} x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

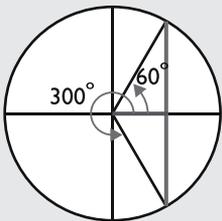
Si $\operatorname{sen} x = 0$



$$x_1 = 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Si $\cos x = \frac{1}{2}$



$$x_3 = 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}$$

Con calculadora

104 Copia y completa la siguiente tabla:

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sen										
cos										
tg										

A la vista del resultado de la tabla anterior, copia y completa las siguientes frases con las palabras «crece» o «decrece»:

- Cuando el ángulo crece de 0° a 90° , el seno
- Cuando el ángulo crece de 0° a 90° , el coseno
- Cuando el ángulo crece de 0° a 90° , la tangente

Solución:

	0°	10°	20°	30°	40°
sen	0,0000	0,1736	0,3420	0,5000	0,6428
cos	1,0000	0,9848	0,9397	0,8660	0,7660
tg	0	0,1763	0,3640	0,5774	0,8391

	50°	60°	70°	80°	90°
sen	0,7660	0,8660	0,9397	0,9848	1,0000
cos	0,6428	0,5000	0,3420	0,1736	0,0000
tg	1,1918	1,7321	2,7475	5,6713	ERROR

- a) Crece. b) Decrece. c) Crece.

105 Sabiendo que $\operatorname{sen} \alpha = 0,7523$, halla el ángulo α y calcula $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$. El ángulo está en el 1.º cuadrante.

Solución:

$$\alpha = 48^\circ 47' 24''$$

$$\cos \alpha = 0,6588$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 1,1419$$

106 Sabiendo que $\cos \alpha = 0,2345$, halla el ángulo α y calcula $\operatorname{sen} \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$. El ángulo está en el 1.º cuadrante.

Solución:

$$\alpha = 76^\circ 26' 16''$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 0,9721$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 4,1455$$

107 Calcula los distintos ángulos menores de 360° en grados, minutos y segundos, sabiendo que:

- $\operatorname{sen} \alpha = -0,4321$
- $\cos \alpha = 0,7654$
- $\operatorname{tg} \alpha = -3,4532$
- $\cos \alpha = -0,3333$

Solución:

$$\text{a) } \alpha = 205^\circ 36' 3'', \alpha = 334^\circ 23' 57''$$

$$\text{b) } \alpha = 40^\circ 3' 27'', \alpha = 319^\circ 56' 33''$$

$$\text{c) } \alpha = 106^\circ 9' 1'', \alpha = 286^\circ 9' 1''$$

$$\text{d) } \alpha = 109^\circ 28' 9'', \alpha = 250^\circ 31' 51''$$

108 Calcula las siguientes razones trigonométricas redondeando el resultado a cuatro decimales:

- $\operatorname{sen} 2,3 \text{ rad}$
- $\cos 0,5 \text{ rad}$
- $\operatorname{tg} 4,345 \text{ rad}$
- $\operatorname{sen} 5,7 \text{ rad}$

Solución:

Hay que poner la calculadora en modo **Rad**.

$$\text{a) } 0,7457$$

$$\text{b) } 0,8776$$

$$\text{c) } 2,5983$$

$$\text{d) } -0,5507$$

109 Calcula los ángulos en radianes aproximando el resultado a cuatro decimales, sabiendo que:

- $\operatorname{sen} \alpha = 0,4444$ en el 1.º cuadrante.
- $\cos \alpha = -0,8011$ en el 2.º cuadrante.
- $\operatorname{tg} \alpha = 2$ en el 3.º cuadrante.
- $\operatorname{sen} \alpha = -0,7055$ en el 4.º cuadrante.

Solución:

Hay que poner la calculadora en modo **Rad**.

$$\text{a) } 0,4605$$

$$\text{b) } 2,4999$$

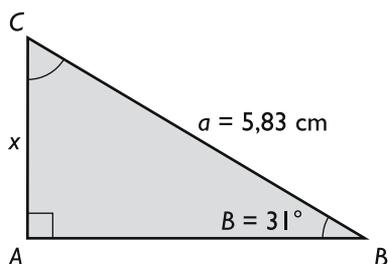
$$\text{c) } 4,2487$$

$$\text{d) } 5,5001$$

Hay que volver a poner la calculadora en modo **Deg**.

Problemas propuestos

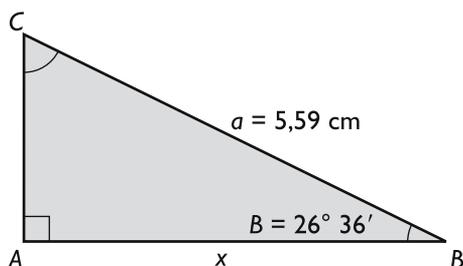
110 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{sen} 31^\circ = \frac{x}{5,83} \Rightarrow x = 5,83 \operatorname{sen} 31^\circ = 3 \text{ cm}$$

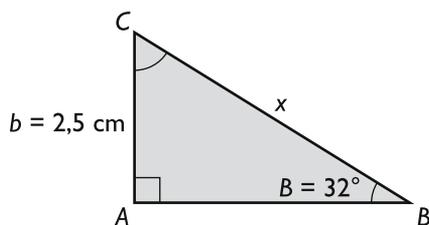
111 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$$\cos 26^\circ 36' = \frac{x}{5,59} \Rightarrow x = 5,59 \cos 26^\circ 36' = 5 \text{ cm}$$

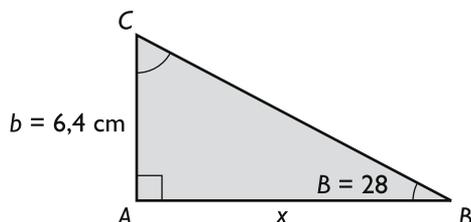
112 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \frac{2,5}{x} \Rightarrow x = \frac{2,5}{\operatorname{sen} 32^\circ} = 4,72 \text{ cm}$$

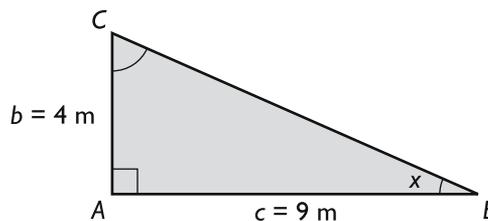
113 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{tg} 28^\circ = \frac{6,4}{x} \Rightarrow x = \frac{6,4}{\operatorname{tg} 28^\circ} = 12,04 \text{ cm}$$

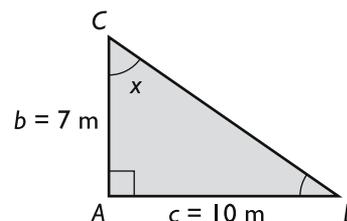
114 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{tg} x = \frac{4}{9} \Rightarrow x = 23^\circ 57' 45''$$

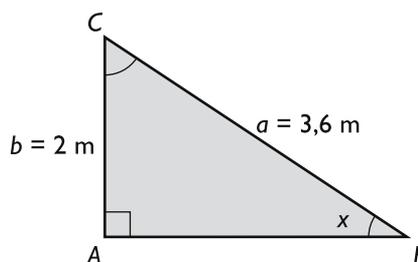
115 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{tg} x = \frac{10}{7} \Rightarrow x = 55^\circ 29''$$

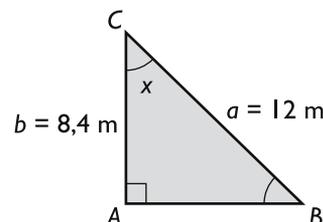
116 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{3,6} \Rightarrow x = 33^\circ 44' 56''$$

117 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:

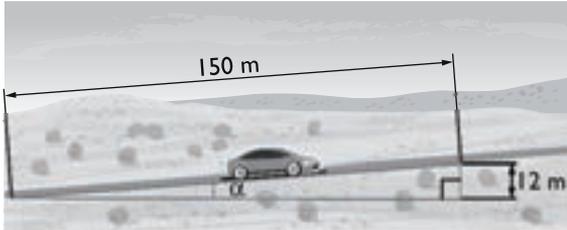


Ejercicios y problemas propuestos

Solución:

$$\cos x = \frac{8,4}{12} \Rightarrow x = 45^\circ 34' 23''$$

- 118** Un tramo de una carretera recta mide 150 m y asciende 12 m. Calcula el ángulo de elevación y la pendiente.



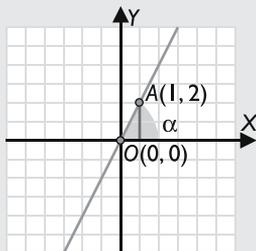
Solución:

$$\sin x = \frac{12}{150} \Rightarrow x = 4^\circ 35' 19''$$

$$\text{Pendiente} = \text{tg } 4^\circ 35' 19'' = 0,08 = 8\%$$

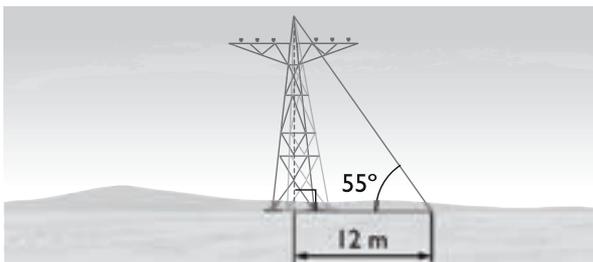
- 119** Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(1, 2)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta.

Solución:



$$\text{tg } \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63^\circ 26' 6''$$

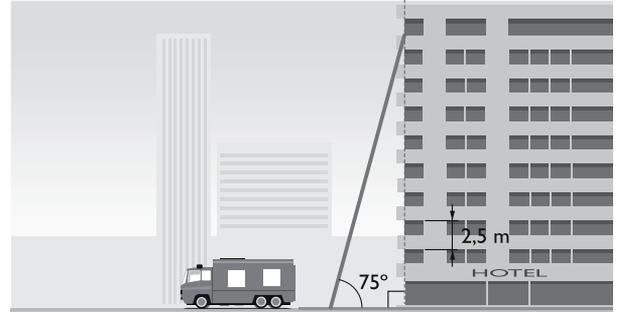
- 120** Halla la altura de una torre eléctrica sabiendo que a una distancia de 12 m de la base se ve la parte superior con un ángulo de 55°



Solución:

$$\text{tg } 55^\circ = \frac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \text{ tg } 55^\circ = 17,14 \text{ m}$$

- 121** Una escalera de bomberos que mide 25 m está apoyada sobre la fachada de un hotel y forma con el suelo un ángulo de 75° . Si cada planta del hotel mide 2,5 m de altura, ¿a qué planta llegará como máximo?



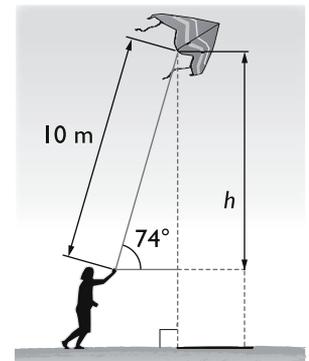
Solución:

$$\sin 75^\circ = \frac{h}{25} \Rightarrow h = 25 \sin 75^\circ = 24,15 \text{ m}$$

$$\text{N.º de planta} = \frac{24,15}{2,5} = 9,6$$

Llega a la planta 10 porque pasa de la planta 9

- 122** Rocío está volando una cometa. Sabiendo que el hilo que ha soltado mide 10 m y el ángulo que forma con la horizontal es de 74° , calcula la altura a la que se encuentra.

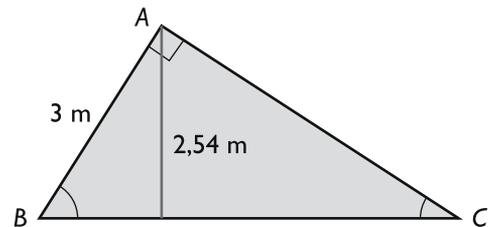


Solución:

$$\sin 74^\circ = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \sin 74^\circ = 9,6 \text{ m}$$

9,6 m más la altura a la que tenga la mano Rocío.

- 123** En el siguiente triángulo rectángulo se conocen un cateto y la altura. Calcula los demás lados y ángulos.



Solución:

$$\sin B = \frac{2,54}{3} \Rightarrow B = 57^\circ 51' 3''$$

$$C = 90^\circ - 57^\circ 51' 3'' = 32^\circ 8' 57''$$

$$\cos B = \frac{3}{\text{Hipotenusa}}$$

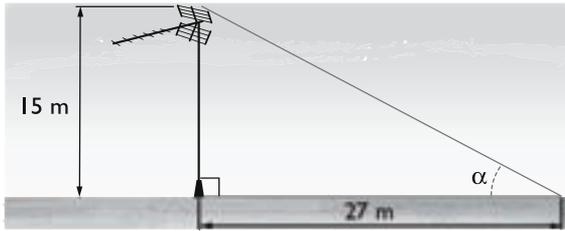
$$\text{Hipotenusa} = \frac{3}{\cos 57^\circ 51' 3''}$$

$$\text{Hipotenusa} = 5,64 \text{ m}$$

$$\sin B = \frac{\text{Cateto AC}}{\text{Hipotenusa}}$$

$$\text{Cateto AC} = 5,64 \sin 57^\circ 51' 3'' = 4,78 \text{ m}$$

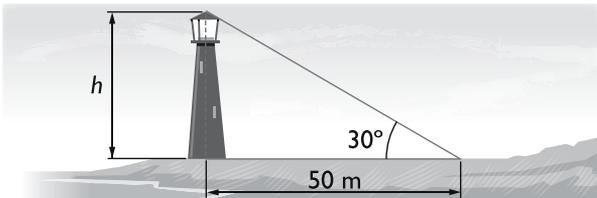
124 Una antena de televisión que mide 15 m proyecta una sombra de 27 m. Halla el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la punta más alta de la antena.



Solución:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{15}{27} \Rightarrow \alpha = 29^\circ 3' 17''$$

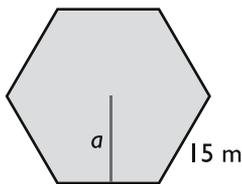
125 Un faro proyecta una sombra de 50 m, y el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la parte más alta del faro es de 30° . Halla la altura del faro.



Solución:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{h}{50} \Rightarrow h = 50 \operatorname{tg} 30^\circ = 28,87 \text{ m}$$

126 Calcula la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 15 m

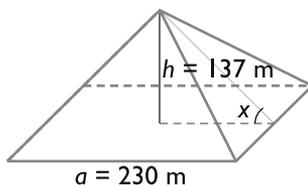


Solución:



$$a = \sqrt{15^2 - 7,5^2} = 13 \text{ m}$$

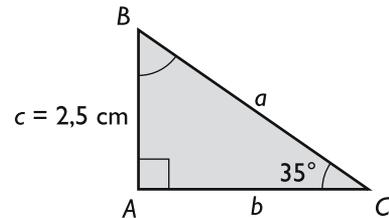
127 La pirámide de Keops de Egipto mide de alto 137 m, la base es cuadrada y tiene de arista 230 m. Halla el ángulo de inclinación de las caras laterales.



Solución:

$$\operatorname{tg} x = \frac{137}{115} \Rightarrow x = 49^\circ 59' 22''$$

123 En un triángulo rectángulo se conoce el cateto, $c = 2,5$ cm, y el ángulo opuesto, $C = 35^\circ$. Calcula los demás lados y ángulos.



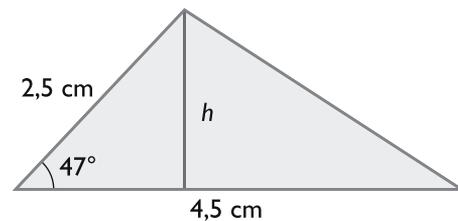
Solución:

$$B = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$$

$$\operatorname{sen} 35^\circ = \frac{2,5}{a} \Rightarrow a = 4,36 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ = \frac{2,5}{b} \Rightarrow b = 3,57 \text{ cm}$$

129 Calcula el área del siguiente triángulo.

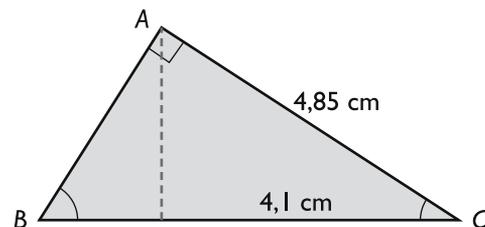


Solución:

$$\operatorname{sen} 47^\circ = \frac{h}{2,5} \Rightarrow h = 1,83 \text{ cm}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 4,5 \cdot 1,83 = 4,12 \text{ cm}^2$$

130 En el siguiente triángulo rectángulo se conocen un cateto y la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa. Calcula los demás lados y ángulos.



Solución:

$$\cos C = \frac{4,1}{4,85} \Rightarrow C = 32^\circ 17' 22''$$

$$B = 90^\circ - 32^\circ 17' 22'' = 57^\circ 42' 38''$$

$$\operatorname{sen} 57^\circ 42' 38'' = \frac{4,85}{\text{Hipotenusa}}$$

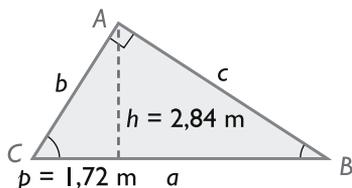
$$\text{Hipotenusa} = 5,74 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} 57^\circ 42' 38'' = \frac{4,85}{\text{Cateto AB}}$$

$$\text{Cateto AB} = 3,06 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas propuestos

131 En el siguiente triángulo rectángulo se conocen la altura y la proyección de un cateto sobre la hipotenusa. Calcula los lados y los ángulos de dicho triángulo.

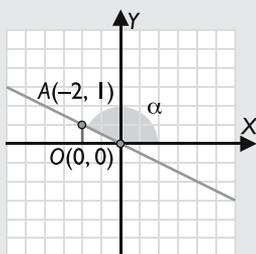


Solución:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} C &= \frac{2,84}{1,72} \Rightarrow C = 58^\circ 47' 58'' \\ B &= 90^\circ - 58^\circ 47' 58'' = 31^\circ 12' 2'' \\ \operatorname{sen} B &= \frac{2,84}{c} \Rightarrow c = 5,48 \text{ m} \\ \operatorname{sen} C &= \frac{2,84}{b} \Rightarrow b = 3,32 \text{ m} \\ \operatorname{sen} B &= \frac{3,32}{a} \Rightarrow a = 6,41 \text{ m} \end{aligned}$$

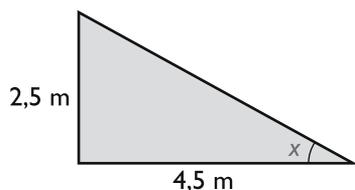
132 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(-2, 1)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

Solución:



$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 153^\circ 26' 6''$$

133 Calcula el ángulo de elevación de una escalera de una casa que en 4,5 m de horizontal sube 2,5 m



Solución:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2,5}{4,5} \Rightarrow \alpha = 29^\circ 3' 17''$$

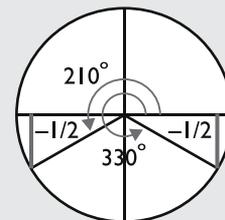
134 Resuelve el sistema de ecuaciones trigonométricas:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 1 \\ 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= -1 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

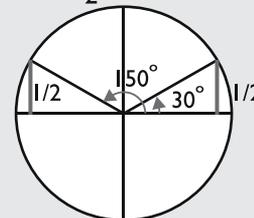
Se despeja $\operatorname{sen} x$ en la 1.ª ecuación y se sustituye en la 2.ª:
 $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y + 1$

$$\begin{aligned} 4(\operatorname{sen} y + 1) \operatorname{sen} y &= -1 \\ 4 \operatorname{sen}^2 y + 4 \operatorname{sen} y + 1 &= 0 \\ (2 \operatorname{sen} y + 1)^2 &= 0 \\ 2 \operatorname{sen} y + 1 &= 0 \\ \text{Si } \operatorname{sen} y &= -\frac{1}{2} \\ y_1 &= 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ y_2 &= 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$$\text{Para } \operatorname{sen} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} y + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} \\ x_1 &= 30^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ x_2 &= 150^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



135 Resuelve el sistema de ecuaciones trigonométricas:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen} x - \cos y &= \frac{1}{2} \\ 2 \operatorname{sen} x \cos y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

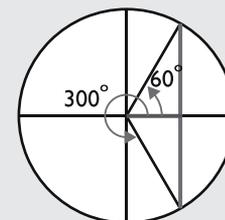
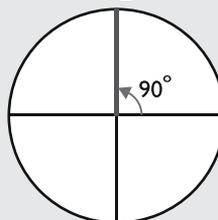
Solución:

Se despeja $\operatorname{sen} x$ en la 1.ª ecuación y se sustituye en la 2.ª:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} + \cos y \\ 2\left(\frac{1}{2} + \cos y\right) \cos y &= 1 \\ 2 \cos^2 y + \cos y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

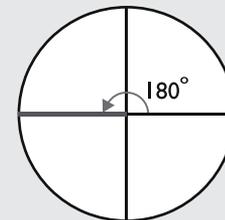
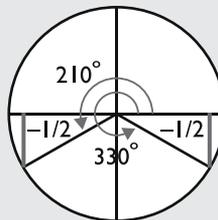
$$\cos y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = 1$$



$$\begin{aligned} x &= 90^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ y_1 &= 60^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, y_2 = 300^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\text{Para } \cos y = -1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$$

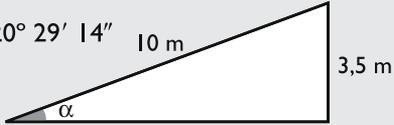


$$\begin{aligned} x_1 &= 210^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z}, x_2 = 330^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \\ y &= 180^\circ + 360^\circ k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

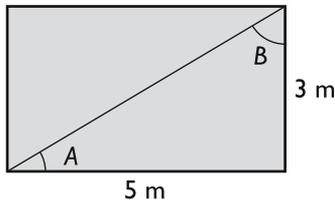
Para profundizar

136 Una cinta transportadora tiene una longitud de 10 m y queremos que eleve la carga 3,5 m. ¿Qué ángulo de elevación hay que ponerle?

Solución:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3,5}{10} \Rightarrow \alpha = 20^\circ 29' 14''$$


137 Un rectángulo mide 5 m de largo y 3 m de alto. Halla el ángulo que forma la diagonal con cada uno de los lados.



Solución:

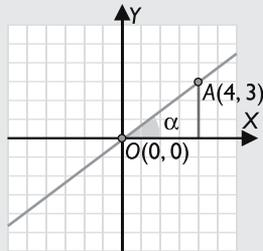
$$\operatorname{tg} A = \frac{3}{5} \Rightarrow A = 30^\circ 57' 50''$$

$$B = 90^\circ - 30^\circ 57' 50'' = 59^\circ 2' 10''$$

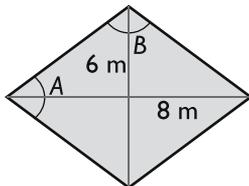
138 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(4, 3)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

Solución:

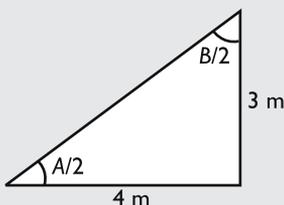
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36^\circ 52' 12''$$



139 Calcula los ángulos de un rombo en el que las diagonales miden 6 m y 8 m



Solución:

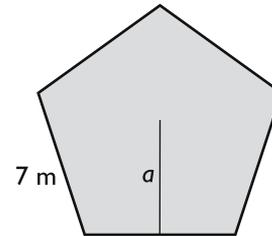


$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{A}{2} = 36^\circ 52' 12''$$

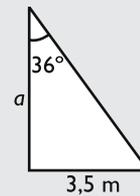
$$A = 73^\circ 44' 24''$$

$$B = 180^\circ - 73^\circ 44' 24'' = 106^\circ 15' 36''$$

140 Calcula la apotema de un pentágono regular cuyo lado mide 7 m

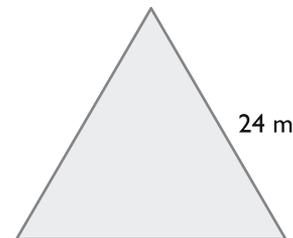


Solución:

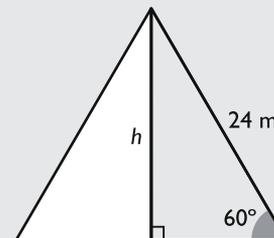


$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{3,5}{a} \Rightarrow a = \frac{3,5}{\operatorname{tg} 36^\circ} = 4,82 \text{ m}$$

141 Calcula el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 24 m



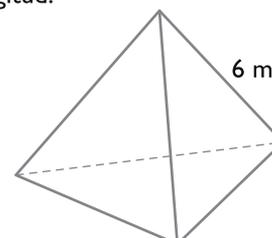
Solución:



$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{24} \Rightarrow h = 24 \operatorname{sen} 60^\circ = 20,78 \text{ m}$$

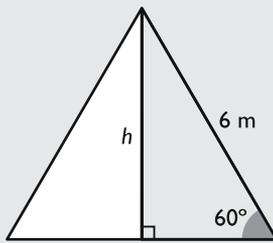
$$A = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 20,78 = 249,36 \text{ m}^2$$

142 Calcula el área de un tetraedro en el que la arista mide 6 m de longitud.



Ejercicios y problemas propuestos

Solución:



Previamente se calcula el área de un triángulo equilátero:

$$\text{sen } 60^\circ = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \text{ sen } 60^\circ$$

$$h = 3\sqrt{3} \text{ m}$$

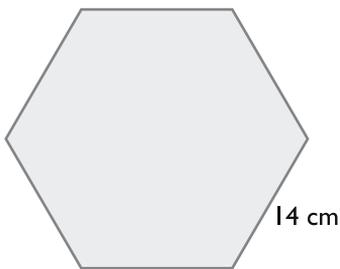
Área de un triángulo equilátero:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ m}^2$$

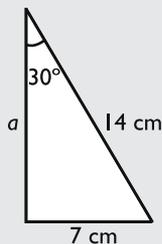
Tetraedro:

$$A_{\text{Tetraedro}} = 4 \cdot 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} = 62,35 \text{ m}^2$$

143 Calcula el área de un hexágono regular cuyo lado mide 14 cm



Solución:



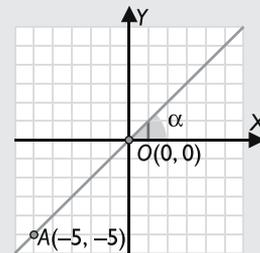
$$\cos 30^\circ = \frac{a}{14} \Rightarrow a = 14 \cos 30^\circ$$

$$a = 12,12 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 14 \cdot 12,12 = 509,04 \text{ cm}^2$$

144 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(-5, -5)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

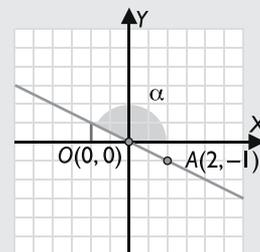
Solución:



$$\alpha = 45^\circ$$

145 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(2, -1)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

Solución:



$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{-2} \Rightarrow \alpha = 153^\circ 26' 6''$$