

 Departamento de Ciencias Curso 2021-2022	Matemáticas 1 (1º B y C)		
	2ª Evaluación	Global	15 de marzo de 2022
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 55 minutos.

PUNTUACIÓN: 2 puntos cada problema.

1--Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 2 \\ \log_2 x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ x^2-16 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Estudia su continuidad (estudiando los límites) y represéntala

2—Calcula los siguientes límites en los puntos que se indican:

- $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{2x-6}{x^2-5x+6} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-3}{2x-2} - \frac{x^3+2}{x^2-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{2x+2}{x^2-16} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3x^2-2x+3} - \sqrt{3x^2+3x-1} \right)$

3--

Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{2x-3} \quad g(x) = x+5 \quad h(x) = \cos x$$

Obtén:

- f^{-1}
- $f \circ h$
- $h \circ f$
- $(g \circ f)^{-1}$

4-- Estudia las asíntotas de las funciones a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ b) $g(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

5-- Calcula el dominio de las funciones: a) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ b) $g(x) = \log \frac{x^2-1}{x}$

Resolución Examen

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 2 \\ \log_2 x & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ x^2-16 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

• Si $x < 2 \Rightarrow f(x) = 2x-3 \Rightarrow$ continua por ser una función polinómica.

• Si $x > 4 \Rightarrow f(x) = x^2-16 \Rightarrow$ continua por ser una función polinómica.

• Si $2 < x < 4 \Rightarrow f(x) = \log_2 x \Rightarrow$ continua por ser una función logarítmica (que es continua en su dominio).

Las posibles discontinuidades aparecerán en $x=2$ y $x=4$

$$\boxed{x=2} \Rightarrow \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x-3) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \log_2 x = 1 \\ f(2) &= \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

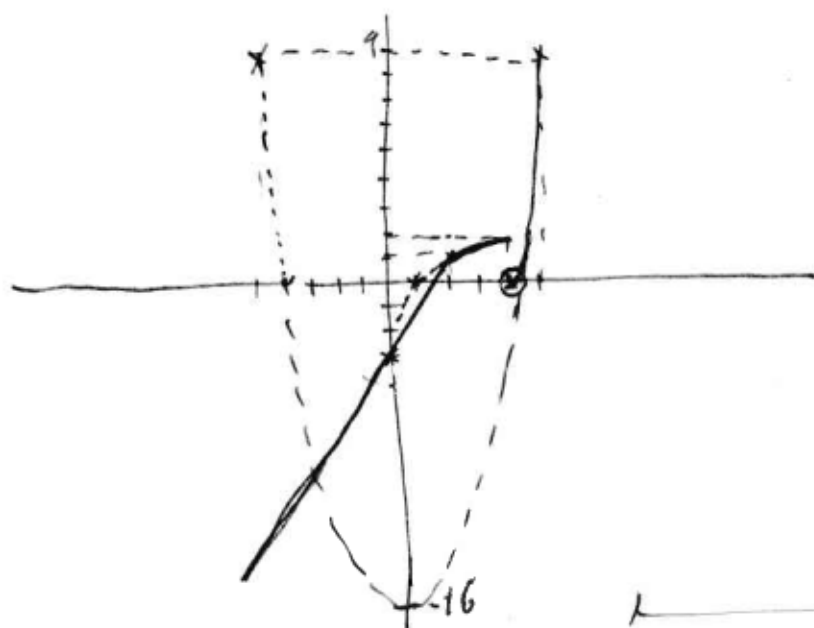
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

f continua en $x=2$

$$\boxed{x=4} \Rightarrow \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \log_2 x = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} x^2-16 = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$$

discontinuidad de salto finito en $x=4$



$$x^2-16 \rightarrow x_0 = 0$$

$$\text{Corte: } x^2-16=0 \rightarrow x=\pm 4$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & -16 \\ -4 & 0 \\ 4 & 0 \end{array}$$

$$\log_2 x$$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{array}$$

$$2x-3$$

$$\begin{array}{r|l} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{array}$$

②

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{x^2-5x+6} = \left[\frac{0}{0} \right] \text{ indet.} \Rightarrow \text{factorizamos:}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x-3)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{1} = \boxed{2}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{2x-2} - \frac{x^3+2}{x^2-1} \right) = [\infty - \infty] \text{ indet.} \Rightarrow \text{Hallamos resta:}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3}{2(x-1)} - \frac{x^3+2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-3)(x+1) - (x^3+2) \cdot 2}{2(x-1)(x+1)} =$$

$$\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)} \left\{ \text{new} = 2(x-1)(x+1) \right\} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2-3x-3-2x^3-4}{2x^2-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3+x^2-3x-7}{2x^2-2} = \boxed{-\infty}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+2}{x^2-16} = \left[\frac{10}{0} \right]$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x+2}{x^2-16} = \left[\frac{10}{-0} \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x+2}{x^2-16} = \left[\frac{10}{+0} \right] = +\infty \end{array} \right.$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3x^2-2x+3} - \sqrt{3x^2+3x-1} \right) = [\infty - \infty] \text{ indet.}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2-2x+3} - \sqrt{3x^2+3x-1} \right) \left(\sqrt{3x^2-2x+3} + \sqrt{3x^2+3x-1} \right)}{\sqrt{3x^2-2x+3} + \sqrt{3x^2+3x-1}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+3 - (3x^2+3x-1)}{\sqrt{3x^2-2x+3} + \sqrt{3x^2+3x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+4}{\sqrt{3x^2} + \sqrt{3x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+4}{x\sqrt{3} + x\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x+4}{2\sqrt{3}x} = \boxed{\frac{-5}{2\sqrt{3}}}$$

3) $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$ $g(x) = x+5$ $h(x) = \cos x$

a) $y = \frac{x-1}{2x-3} \Rightarrow 2xy - 3y = x-1 \Rightarrow 2xy - x = 3y-1 \Rightarrow x(2y-1) = 3y-1$
 $\Rightarrow x = \frac{3y-1}{2y-1} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2x-1}}$

b) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\cos x) = \boxed{\frac{\cos x - 1}{2\cos x - 3}} = \frac{-1 + \cos x}{-3 + 2\cos x}$

c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) = \boxed{\cos\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)}$

d) $(g \circ f)^{-1} \rightarrow (g \circ f) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{2x-3}\right) = \frac{x-1}{2x-3} + 5 =$

$$\frac{x-1+10x-15}{2x-3} = \frac{11x-16}{2x-3}$$

$y = \frac{11x-16}{2x-3} \Rightarrow 2xy - 3y = 11x-16 \Rightarrow 2xy - 11x = 3y-16 \Rightarrow$
 $x(2y-11) = 3y-16 \Rightarrow x = \frac{3y-16}{2y-11} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{3x-16}{2x-11}}$



4)

a) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

A. Horizontal:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2-4} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2-4} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Asíntota horizontal en $\boxed{y=0}$

x	Asintota	$\frac{x+1}{x^2-4}$	& acerca...
1000	0	0'001...	Por arriba
-1000	0	-0'0009...	Por abajo

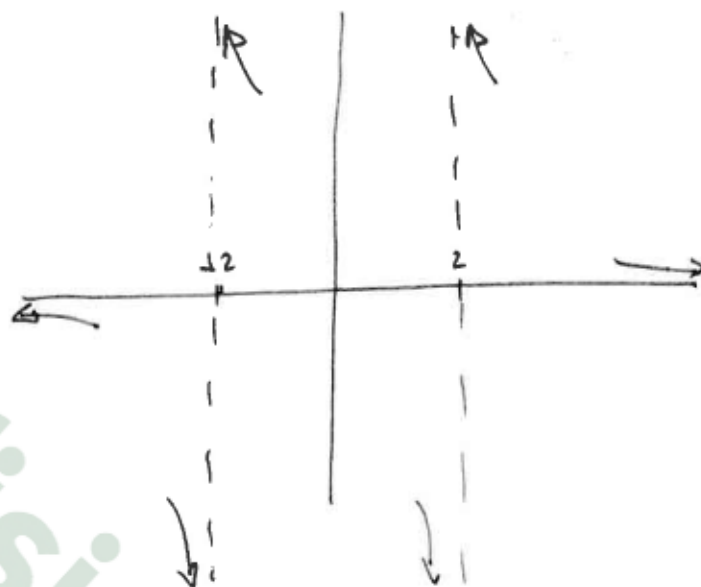
A. Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = \left[\frac{-1}{+0} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x+1}{x^2-4} = \left[\frac{-1}{-0} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^2-4} = \left[\frac{3}{-0} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x^2-4} = \left[\frac{3}{+0} \right] = +\infty$$



A. Oblicua: No tiene, por tener horizontal.

5)

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$$

A. Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x+2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x+2} = -\infty$$

No hay
A. Horizontal!

A. Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+1}{x+2} = \left[\frac{5}{-0} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+1}{x+2} = \left[\frac{5}{+0} \right] = +\infty$$

A. Vertical en $x = -2$

A. oblicua

(Nota: También se puede hacer realizando la división).

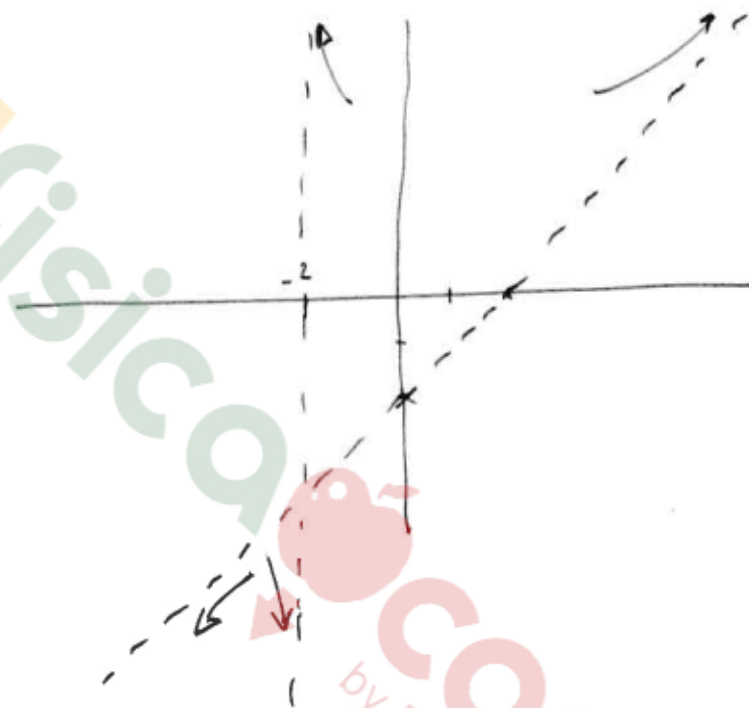
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x}{x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x + 1}{x + 2} = -2$$

A. oblicua en $y = mx + n \Rightarrow \boxed{y = x - 2}$

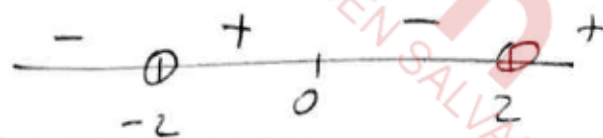
x	Añitos	$\frac{x^2 + 1}{x + 2}$	Se acerca...
1000	998	998'0049...	Por arriba
-1000	-1002	-1002'005...	Por abajo



5) a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

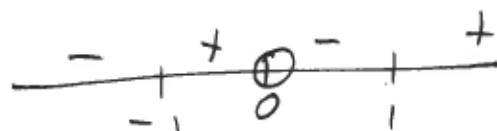
$$x = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$



$$\boxed{\text{Dom}(f) = (-2, 0] \cup (2, +\infty)}$$

b) $g(x) = \log \frac{x^2 - 1}{x}$ $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$
 $x = 0$



$$\boxed{\text{Dom}(g) = (-1, 0) \cup (1, +\infty)}$$