

Saberes básicos

- 1 Los números reales**
- 2 Ecuaciones, inecuaciones y sistemas**

Unidad 1.

Los números reales

1. Números reales. Recta real

Explora

Representa en la recta real, de forma aproximada, los números $3/4$ y $\sqrt{7} = 2,64575131\dots$

Solución:



Elabora

1 Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

a) -3 y 2

b) $-2,5$ y $3,7$

Solución:



$$d(-3, 2) = |2 - (-3)| = 5$$



$$d(-2,5; 3,7) = |3,7 - (-2,5)| = 6,2$$

b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 < x < 1\}$



Intervalo abierto.

c) $\{x \in \mathbb{R}; x > -3\}$



Semirrecta, intervalo abierto.

d) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 3\}$



Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

2 Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

a) $[2, 5)$

b) $(-2, 1)$

c) $(-3, +\infty)$

d) $(-\infty, 3]$

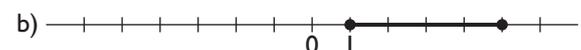
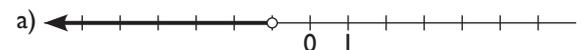
Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; 2 \leq x < 5\}$



Intervalo semiabierto o semicerrado.

3 Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

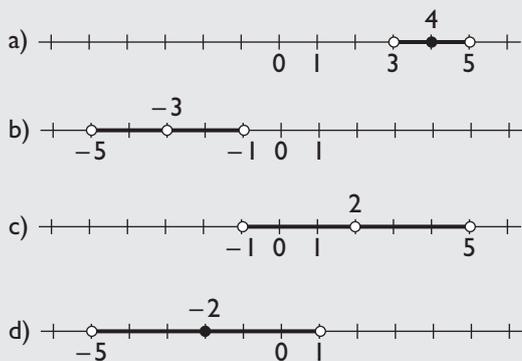
a) $(-1, 1)$

b) $[1, 5]$

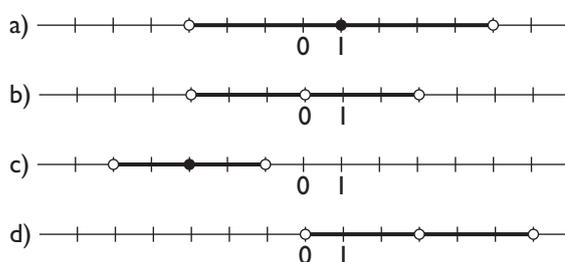
4 Representa gráficamente los siguientes entornos:

a) $E(4, 1)$ b) $E^*(-3, 2)$ c) $E^*(2, 3)$ d) $E(-2, 3)$

Solución:



5 Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

- a) $E(1, 4)$ b) $E^*(0, 3)$ c) $E(-3, 2)$ d) $E^*(3, 3)$

2. Radicales y operaciones

Explora

Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $\sqrt[3]{8} = x$ b) $\sqrt[4]{x} = 10$ c) $\sqrt[5]{32} = 2$ d) $\sqrt[4]{81} = x$

Solución:

- a) $x = 2$ b) $x = 10000$ c) $x = 5$ d) $x = \pm 3$

Elabora

6 Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{16}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt[5]{32}$

Solución:

- a) ± 2 b) -5
c) No tiene solución real. d) 2

7 Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $7^{3/4}$ b) $5^{-1/4}$ c) $3^{-5/7}$ d) $2^{1/3}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{7^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$ d) $\sqrt[3]{2}$

8 Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[7]{5^2}$ b) $\frac{1}{\sqrt[6]{11^5}}$ c) $\sqrt[5]{3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Solución:

- a) $5^{2/7}$ b) $11^{-5/6}$ c) $3^{1/5}$ d) $2^{-1/3}$

9 Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{20}$ c) $\sqrt{27}$ d) $\sqrt{72}$

Solución:

- a) $3\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $3\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{2}$

10 Suma los siguientes radicales:

- a) $5\sqrt{8} - 3\sqrt{50} + \sqrt{98}$
b) $4\sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{625} - 2\sqrt[3]{135}$

Solución:

- a) $2\sqrt{2}$ b) $7\sqrt[3]{5}$

11 Opera los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{12}$ b) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{64}$
c) $\sqrt[3]{12} : \sqrt[3]{6}$ d) $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{16}$

Solución:

- a) $2\sqrt[3]{30}$ b) $2\sqrt[5]{16}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[5]{3/4}$

12 Las expresiones que están como potencia pásalas a radical y las que están como radical pásalas a potencia:

- a) $(\sqrt[5]{7})^2$ b) $\sqrt[3]{6^5}$ c) $\sqrt[4]{5^3}$ d) $(\sqrt[7]{5})^2$

Solución:

- a) $\sqrt[5]{7^2}$ b) $(\sqrt[3]{6})^5$ c) $(\sqrt[4]{5})^3$ d) $\sqrt[7]{5^2}$

13 Expresa con un solo radical las siguientes expresiones:

- a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{7}}$ d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{5}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt[6]{7}$ d) $\sqrt[12]{5}$

14 Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{7}{\sqrt[5]{13^3}}$ c) $\frac{5}{\sqrt{7+\sqrt{3}}}$ d) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

Solución:

a) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{7\sqrt[5]{13^2}}{13}$

c) $\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}$ d) $7-4\sqrt{3}$

15 Halla la diagonal de un ortoedro cuyas aristas miden 5 m, 4 m y 3 m

Solución:

$\sqrt{5^2+4^2+3^2} = 5\sqrt{2} = 7,07 \text{ m}$

3. Logaritmos

Explora

Halla el valor de x en los siguientes casos:

a) $2^3 = x$ b) $x^3 = 125$ c) $2^x = 32$ d) $10^3 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:

a) $x = 8$ b) $x = 5$ c) $x = 5$ d) $x = 1\,000$ e) $x = 10$ f) $x = 6$

Elabora

16 Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

a) $2^6 = x$ b) $x^5 = 32$ c) $2^x = 128$
d) $10^6 = x$ e) $x^4 = 10\,000$ f) $10^x = 1\,000$

Solución:

a) $x = 64$ b) $x = 2$
c) $x = 7$ d) $x = 1\,000\,000$
e) $x = 10$ f) $x = 3$

17 Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 32$ b) $\log_3 1$
c) $\log_5 \frac{1}{25}$ d) $\log 100$

Solución:

a) 5 b) 0 c) -2 d) 2

18 Calcula mentalmente la parte entera de los logaritmos:

a) $\log_2 50$ b) $\log_3 36$
c) $\log_5 98,75$ d) $\log 5\,678,24$

Solución:

a) 5 b) 3 c) 2 d) 3

19 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos:

a) $\log 725,263$ b) $\log 0,00356$
c) $\ln 24,6845$ d) $\ln 0,000765$

Solución:

a) 2,8605 b) -2,4486 c) 3,2062 d) -7,1756

20 Sabiendo que $\log 2 = 0,3010$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 4$ b) $\log 5$ c) $\log 8$ d) $\log \sqrt{5}$

Solución:

a) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$
b) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = 1 - \log 2 = 0,6990$
c) $\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2 = 0,9030$
d) $\log \sqrt{5} = \frac{1}{2} \log 5 = \frac{1}{2} 0,699 = 0,3495$

21 Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla:

a) $\log 2,5^{17}$ b) $\log 0,0234^{-25}$
c) $\log \sqrt[5]{87,012}$ d) $\log \sqrt[6]{0,0987}$

Solución:

a) 6,7650 b) 40,7696
c) 0,3879 d) -0,1676

22 Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

a) $\log_2 51,27$ b) $\log_3 8,431$
c) $\log_5 0,034$ d) $\log_7 1\,000$

Solución:

a) 5,6800 b) 1,9406
c) -2,1010 d) 3,5499

5. Sucesiones de números reales

Explora

Escribe tres términos más en las siguientes sucesiones:

- a) 2, 6, 10, 14... b) 1, 2, 4, 8... c) 3, -3, 3, -3... d) 1, 1, 2, 3, 5...

Solución:

- a) 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26... b) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64... c) 3, -3, 3, -3, 3, -3, 3... d) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Elabora

31 Añade tres términos en cada una de las sucesiones siguientes:

- a) 3, 7, 11, 15...
 b) 5, 10, 20, 40...
 c) 1, 4, 9, 16, 25...
 d) 1, -3, 5, -7, 9...

Solución:

- a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27...
 b) 5, 10, 20, 40, 80, 160, 320...
 c) 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64...
 d) 1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, -15...

32 Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 2^n$ b) $a_n = 2n + 3$
 c) $a_n = (-1)^n (n + 1)$ d) $a_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Solución:

- a) 2, 4, 8, 16
 b) 5, 7, 9, 11
 c) -2, 3, -4, 5
 d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}$

33 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) 2, 4, 6, 8, 10... b) 1, 4, 9, 16, 25...

Solución:

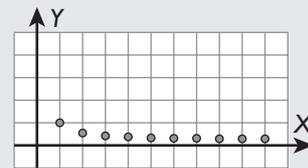
- a) $a_n = 2n$ b) $a_n = n^2$

34 Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

- a) $a_n = \frac{1}{n}$
 b) $a_n = n^2$
 c) $a_n = \frac{2n + 1}{n}$
 d) $a_n = (-1)^n (n - 1)$

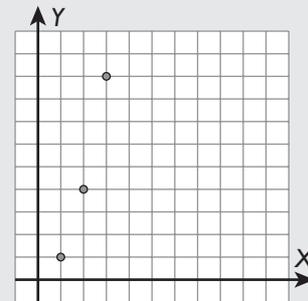
Solución:

a)



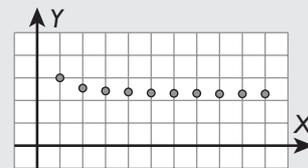
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

b)



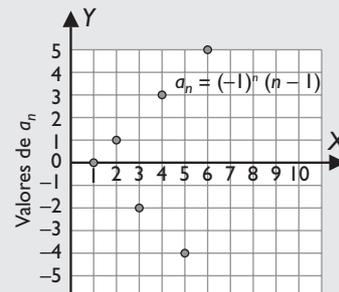
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

c)



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n + 1}{n} = 2$$

d)



No existe el $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n (n - 1)$

Los valores de la sucesión oscilan de negativo a positivo en cada término haciéndose cada vez más grandes en valor absoluto.

Actividades finales

Elabora actividades de las secciones

1. Números reales. Recta real

35 Representa en la recta real los siguientes pares de números y calcula la distancia que hay entre ellos.

- a) -5 y -2 b) $-2,4$ y $3,5$

Solución:



$$d(-5, -2) = |-2 - (-5)| = 3$$



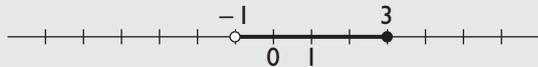
$$d(-2,4; 3,5) = |3,5 - (-2,4)| = 5,9$$

36 Escribe en forma de desigualdad y representa gráficamente los siguientes intervalos, y clasifícalos:

- a) $(-1, 3]$ b) $[-2, 1]$ c) $[2, +\infty)$ d) $(-\infty, -1)$

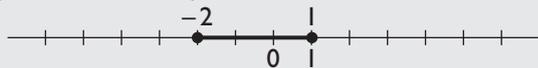
Solución:

a) $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 3\}$



Intervalo semiabierto o semicerrado.

b) $\{x \in \mathbb{R}; -2 \leq x \leq 1\}$



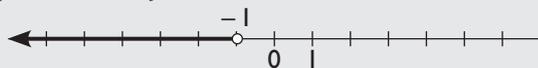
Intervalo cerrado.

c) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$



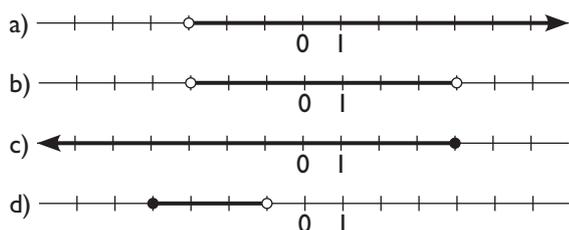
Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.

d) $\{x \in \mathbb{R}; x < -1\}$



Semirrecta, intervalo abierto.

37 Escribe los intervalos que se representan en los siguientes dibujos y clasifícalos:



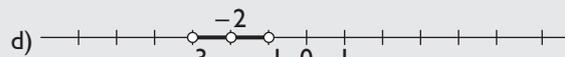
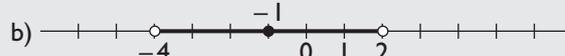
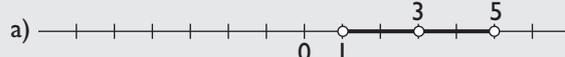
Solución:

- a) $(-3, +\infty)$ Semirrecta, intervalo abierto.
 b) $(-3, 4)$ Intervalo abierto.
 c) $(-\infty, 4]$ Semirrecta, intervalo semiabierto o semicerrado.
 d) $[-4, -1)$ Intervalo semiabierto o semicerrado.

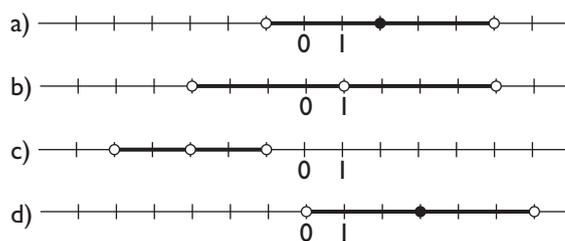
38 Representa gráficamente los siguientes entornos:

- a) $E^*(3, 2)$ b) $E(-1, 3)$ c) $E(1, 2)$ d) $E^*(-2, 1)$

Solución:



39 Escribe los entornos que se representan en los siguientes dibujos:



Solución:

- a) $E(2, 3)$ b) $E^*(1, 4)$ c) $E^*(-3, 2)$ d) $E(3, 3)$

2. Radicales y operaciones

40 Calcula mentalmente todas las raíces reales de los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{625}$ b) $\sqrt[4]{-81}$ c) $\sqrt[7]{-128}$ d) $\sqrt[5]{243}$

Solución:

- a) ± 5 b) No tiene solución real. c) -2 d) 3

41 Escribe en forma de radical las siguientes potencias:

- a) $5^{-2/3}$ b) $3^{1/5}$ c) $2^{3/4}$ d) $7^{-1/5}$

Solución:

- a) $\frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}$ b) $\sqrt[5]{3}$ c) $\sqrt[4]{2^3}$ d) $\frac{1}{\sqrt[5]{7}}$

42 Escribe en forma de potencia los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[5]{7^3}$ b) $\frac{1}{\sqrt[4]{11}}$ c) $\sqrt[3]{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[7]{3^5}}$

Solución:

- a) $7^{3/5}$ b) $11^{-1/4}$ c) $5^{1/3}$ d) $3^{-5/7}$

43 Extrae mentalmente todos los factores que se pueda en los siguientes radicales:

- a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{50}$ d) $\sqrt{75}$

Solución:

- a) $4\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{5}$ c) $5\sqrt{2}$ d) $5\sqrt{3}$

44 Suma los siguientes radicales:

- a) $4\sqrt{27} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75}$
 b) $5\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{250}$

Solución:

- a) $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt[3]{2}$

45 Multiplica los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[4]{60} \cdot \sqrt[4]{24}$ b) $\sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{128}$

Solución:

- a) $2\sqrt[4]{90}$ b) $2\sqrt[7]{2^4}$

46 Divide los siguientes radicales:

- a) $\sqrt[5]{40} : \sqrt[5]{5}$ b) $\sqrt[6]{24} : \sqrt[6]{36}$

Solución:

- a) $\sqrt[5]{8}$ b) $\sqrt[6]{2/3}$

47 Transforma los radicales siguientes. Los que están como potencia pásalos a radical y los que están como radical pásalos a potencia:

- a) $(\sqrt[3]{5})^2$ b) $\sqrt[5]{7^2}$ c) $\sqrt[7]{3^5}$ d) $(\sqrt[11]{13})^5$

Solución:

- a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $(\sqrt[5]{7})^2$ c) $(\sqrt[7]{3})^5$ d) $\sqrt[11]{13^5}$

48 Expresa en forma de un solo radical las siguientes expresiones:

- a) $\sqrt{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$ c) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ d) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}}$

Solución:

- a) $\sqrt[4]{3}$ b) 2 c) $\sqrt[6]{5}$ d) $\sqrt[12]{7}$

49 Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\frac{3}{\sqrt[2]{5^2}}$ c) $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

Solución:

- a) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{3\sqrt[2]{5^2}}{5}$ c) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

3. Logaritmos

50 Halla mentalmente el valor de x en los siguientes casos:

- a) $3^3 = x$ b) $x^3 = 125$
 c) $3^x = 81$ d) $10^3 = x$
 e) $x^2 = 100$ f) $10^x = 1\,000\,000$

Solución:

- a) $x = 27$ b) $x = 5$ c) $x = 4$
 d) $x = 1\,000$ e) $x = \pm 10$ f) $x = 6$

51 Calcula mentalmente los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 1$ b) $\log_3 \frac{1}{9}$ c) $\log_5 25$ d) $\log 0,0001$

Solución:

- a) 0 b) -2 c) 2 d) -4

52 Calcula mentalmente la parte entera de los siguientes logaritmos:

- a) $\log_2 27$ b) $\log_5 18,27$ c) $\log 78,24$

Solución:

- a) 4 b) 1 c) 1

53 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log 86,233$ b) $\log 0,0874$ c) $\ln 765,023$

Solución:

- a) 1,9357 b) -1,0585 c) 6,6399 d) -4,3949

54 Utilizando la calculadora y las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log 5,7^{12}$ b) $\log 0,567^{-15}$ c) $\log \sqrt[4]{345,98}$

Solución:

- a) 9,0705 b) 3,6963 c) 0,6348

55 Utilizando la calculadora y la fórmula del cambio de base, halla los siguientes logaritmos y redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log_2 7,3456$ b) $\log_3 45,987$
 c) $\log_5 0,3054$ d) $\log_7 0,056712$

Solución:

- a) 2,8769 b) 3,4847 c) -0,7370 d) -1,4748

4. Aproximaciones y errores

56 Redondea a dos cifras decimales y calcula la parte entera y decimal de los siguientes números:

- a) $-4,67506$ b) π c) $\sqrt{2}$ d) $-e$

Solución:

- | | | |
|------------|--------------------|-----------------------|
| a) $-4,68$ | Parte entera: -5 | Parte decimal: $0,32$ |
| b) $3,14$ | Parte entera: 3 | Parte decimal: $0,14$ |
| c) $1,41$ | Parte entera: 1 | Parte decimal: $0,41$ |
| d) $-2,72$ | Parte entera: -3 | Parte decimal: $0,28$ |

57 Redondea a dos cifras decimales los siguientes números y di cuáles de las aproximaciones son por defecto y cuáles por exceso:

- a) $\frac{43}{6}$ b) $83,7967$ c) $\sqrt[5]{97}$ d) e

Solución:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| a) $7,17$; por exceso. | b) $83,80$; por exceso. |
| c) $2,49$; por defecto. | d) $2,72$; por exceso. |

58 Trunca a dos cifras decimales los siguientes números:

- a) $\frac{43}{6}$ b) $83,7967$ c) $\sqrt[5]{97}$ d) e

Solución:

- a) $7,16$ b) $83,79$ c) $2,49$ d) $2,71$

59 Halla el error absoluto y relativo que se comete al aproximar con dos cifras decimales los siguientes números:

- a) $\frac{23}{11}$ b) $\sqrt{7}$ c) e d) $\sqrt[3]{86}$

Solución:

- | | |
|------------------------------|---------------------------|
| a) Error absoluto: $0,00091$ | Error relativo: $0,00043$ |
| b) Error absoluto: $0,0042$ | Error relativo: $0,0016$ |
| c) Error absoluto: $0,0017$ | Error relativo: $0,00063$ |
| d) Error absoluto: $0,004$ | Error relativo: $0,00091$ |

60 Expresa en notación científica los siguientes números:

- a) $987\,600\,000$ b) $567\,800\,000$
c) $0,00003902$ d) $0,006783$

Solución:

- a) $9,876 \cdot 10^8$ b) $5,678 \cdot 10^8$
c) $3,902 \cdot 10^{-5}$ d) $6,783 \cdot 10^{-3}$

61 Expresa en notación decimal los siguientes números:

- a) $9,845 \cdot 10^8$ b) $5,44 \cdot 10^{-5}$
c) $3,2 \cdot 10^4$ d) $7,087 \cdot 10^{-7}$

Solución:

- a) $984\,500\,000$ b) $0,0000544$
c) $32\,000$ d) $0,0000007087$

62 Opera y expresa el resultado en notación científica:

- a) $3,4^{50}$
b) $0,99^{1000}$
c) $7,56 \cdot 10^{18} + 2,35 \cdot 10^{17}$
d) $6,45 \cdot 10^{23} : (2,63 \cdot 10^{-15})$

Solución:

- a) $3,75 \cdot 10^{26}$ b) $7,795 \cdot 10^{18}$
c) $4,32 \cdot 10^{-5}$ d) $2,45 \cdot 10^{38}$

5. Sucesiones de números reales

63 Añade tres términos en cada una de las sucesiones:

- a) $5, -7, 9, -11, 13, \dots$ b) $2, 5, 10, 17, \dots$

Solución:

- a) $5, -7, 9, -11, 13, -15, 17, -19, \dots$
b) $2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, \dots$

64 Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones:

- a) $a_n = 2n + 1$ b) $a_n = (-1)^n n(n + 1)$

Solución:

- a) $3, 5, 7, 9, \dots$ b) $-2, 6, -12, 20, \dots$

65 Halla el término general de las siguientes sucesiones:

- a) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \dots$

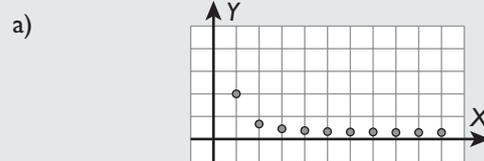
Solución:

- a) $a_n = 2n - 1$ b) $a_n = \frac{1}{3n - 1}$

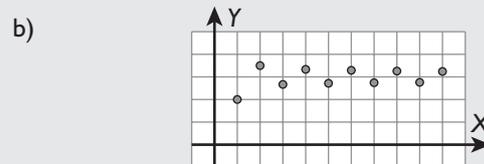
66 Representa los primeros términos de las siguientes sucesiones e indica el valor al que tienden:

- a) $a_n = \frac{n + 1}{n^2}$ b) $a_n = 3 + (-1)^n \frac{1}{n}$

Solución:



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n^2} = 0$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + (-1)^n \frac{1}{n} \right) = 3$$

Elabora actividades para reforzar

67 Halla el número de oro ϕ que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, para los valores $p = 1, q = 1$

Solución:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180\dots$$

68 Halla el número de plata que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, para los valores $p = 2, q = 1$

Solución:

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Número de plata = $1 + \sqrt{2} = 2,4142\dots$

69 Halla el número de bronce que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, para los valores $p = 3, q = 1$

Solución:

$$x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Número de bronce = $\frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3,3027\dots$

70 Halla el número de cobre que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, para los valores $p = 1, q = 2$

Solución:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$$

Número de cobre = 2

71 Halla el número de níquel que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, para los valores $p = 1, q = 3$

Solución:

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

Número de níquel = $\frac{1 + \sqrt{13}}{2} = 2,3027\dots$

72 Halla el número de platino que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 - px - q = 0$, para los valores $p = 2, q = 2$

Solución:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

Número de platino = $1 + \sqrt{3} = 2,7320\dots$

73 Escribe en forma de intervalo las desigualdades:

- a) $2 \leq x \leq 5$ b) $x > 3$ c) $x < 4$

Solución:

- a) $[2, 5]$ b) $(3, +\infty)$ c) $(-\infty, 4)$

74 Escribe en forma de entorno las siguientes desigualdades:

- a) $|x - 2| < 3$ b) $|x| < 2,5$ c) $|x + 3| < 2$

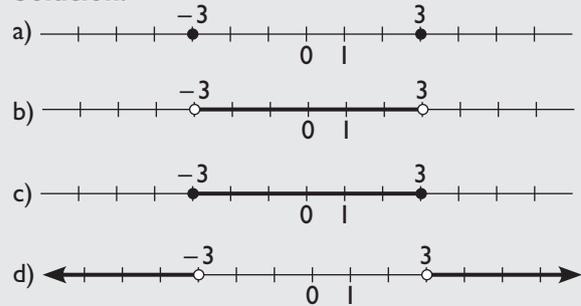
Solución:

- a) $E(2, 3)$ b) $E(0; 2,5)$ c) $E(-3, 2)$

75 Representa gráficamente los conjuntos dados por las siguientes expresiones:

- a) $|x| = 3$ b) $|x| < 3$ c) $|x| \leq 3$ d) $|x| > 3$

Solución:



76 Suma los siguientes radicales:

- a) $3a\sqrt{8a^3} - 5\sqrt{18a^5} + 7a\sqrt{50a^3}$
 b) $7\sqrt[3]{16x^8} + 5\sqrt[3]{54x^5} - 2\sqrt[3]{128x^2}$

Solución:

- a) $26a^2\sqrt{2a}$
 b) $(14x^2 + 15x - 8)\sqrt[3]{2x^2}$

77 Racionaliza las siguientes expresiones:

- a) $\frac{a}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}$ c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ d) $\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$

Solución:

- a) \sqrt{a} b) $\frac{b\sqrt[3]{a^5}}{a}$ c) $\frac{a + \sqrt{ab}}{a - b}$ d) $\frac{a^2 + 2a\sqrt{b} + b}{a^2 - b}$

78 Calcula, aplicando la fórmula de cambio de base, los siguientes logaritmos y redondea el resultado a cuatro decimales:

- a) $\log_{1/2} 15,87$ b) $\log_{1/3} 345,769$ c) $\log_{1/5} 0,0006$

Solución:

- a) $-3,9882$ b) $-5,3211$ c) $4,6094$

Con calculadora

79 Halla con la calculadora el valor de los siguientes números redondeando a 5 decimales:

- a) π b) e c) $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ d) $\sqrt[3]{5}$

Solución:

- a) $3,14159$ b) $2,71828$ c) $1,61803$ d) $1,25850$

80 Halla con la calculadora los siguientes números redondeando a 5 decimales:

- a) $\frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ b) $\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}$ c) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} (2 + \sqrt{2})}{2}$

d) ¿Qué observas de los apartados a), b) y c)?

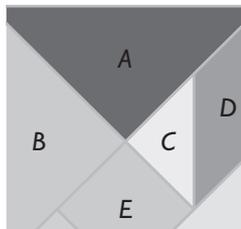
Elabora problemas

84 Halla de forma exacta la longitud de una circunferencia de diámetro l m. ¿Qué clase de número es?

Solución:

$L = \pi m$ Es un número irracional.

85 La siguiente figura se conoce con el nombre de *tangram*. Si el lado del cuadrado mide 1 m, halla el área de cada una de las figuras que lo componen.



Solución:

$$A = B = \frac{1}{4} \text{ m}^2 \quad C = F = \frac{1}{16} \text{ m}^2 \quad D = E = G = \frac{1}{8} \text{ m}^2$$

86 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número π

Solución:

(3, 4)

Solución:

- a) $1,30656$ b) $1,30656$
c) $1,30656$ d) Los tres son iguales al número cordobés.

81 Halla el valor de los siguientes resultados y redondea el resultado a cinco decimales:

- a) $1,000001^{1000000}$ b) $0,999999^{1000000}$

Solución:

- a) $2,71828$ b) $0,36788$

82 Utilizando la calculadora, halla los siguientes logaritmos; redondea los resultados a cuatro decimales:

- a) $\log \pi$ b) $\log e$ c) $\ln \pi$ d) $\ln 10$

Solución:

- a) $0,4971$ b) $0,4343$ c) $1,1447$ d) $2,3026$

83 Utilizando la calculadora, halla:

- a) π^π b) e^e c) π^e d) e^π

Solución:

- a) $36,4622$ b) $15,1543$ c) $22,4592$ d) $23,1407$

87 La longitud de una finca rectangular es 15 m y el perímetro es inferior a 50 m. ¿Qué valores puede tomar el ancho de la finca?

Solución:

$$2x + 30 < 50 \Rightarrow 0 < x < 10$$

88 Si tomamos como valor de π al dado por Arquímedes de $22/7$, ¿qué error absoluto y relativo estamos cometiendo?

Solución:

Error absoluto: $0,0013$ Error relativo: $0,0004$

89 Calcula las siguientes potencias redondeando los resultados a cinco decimales. ¿A qué número real muy conocido se aproximan los valores que se van obteniendo?

- a) $1,1^{10}$ b) $1,01^{100}$
c) $1,001^{1000}$ d) $1,0001^{10000}$
e) $1,00001^{100000}$ f) $1,000001^{1000000}$

Solución:

- a) $2,59374$ b) $2,70481$ c) $2,71692$
d) $2,71815$ e) $2,71827$ f) $2,71828$

Se aproximan hacia el número e

90 Se construye un recipiente de un litro para envasar leche. Si el envase tiene forma de prisma rectangular de medidas $9,6 \text{ cm} \times 6,3 \text{ cm} \times 16,6 \text{ cm}$, ¿qué error relativo estamos cometiendo?

Solución:

Volumen: $9,6 \cdot 6,3 \cdot 16,6 = 1\,003,968 \text{ cm}^3 = 1,003968 \text{ L}$
 Error relativo: $0,003968$

91 Halla la fórmula del área de un triángulo equilátero cuyo lado mide $a \text{ cm}$

Solución:

$$\text{Área} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} \text{ cm}^2$$

92 Halla la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide $x \text{ m}$

Solución:

$$d = x\sqrt{2} \text{ m}$$

93 Demuestra que el producto de dos números irracionales no es siempre irracional, resolviendo el siguiente contraejemplo: halla un número irracional que al multiplicarlo por el número irracional $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ sea racional.

Solución:

$$(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2}) = 5 - 2 = 3$$

94 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga a $\log 525$

Solución:

$(2, 3)$

95 De dos números se sabe que $\log x + \log y = 0$. ¿Qué relación hay entre x e y ?

Solución:

$$\log xy = \log 1$$

$$xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$$

Es decir, son inversos.

96 Sabiendo que $\log 5 = 0,6990$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

a) $\log 2$

b) $\log 25$

c) $\log 4$

d) $\log \sqrt{5}$

Solución:

a) $\log 2 = \log \frac{10}{5} = 1 - \log 5 = 0,3010$

b) $\log 25 = \log 5^2 = 2 \log 5 = 1,3980$

c) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 0,6020$

d) $\log \sqrt{5} = \frac{\log 5}{2} = 0,3495$

97 Una célula se reproduce por bipartición cada hora. ¿Cuántos días tardará en sobrepasar el billón?

Solución:

$$2^x = 10^{12}$$

$$x \log 2 = 12$$

$$x = \frac{12}{\log 2} = 39,86$$

Tardará casi 2 días.

98 Un coche deportivo cuesta $70\,000 \text{ €}$ y se devalúa cada año un 15% . ¿Cuántos años tardará en valer menos de $10\,000 \text{ €}$?

Solución:

$$70\,000 \cdot 0,85^x = 10\,000$$

$$7 \cdot 0,85^x = 1$$

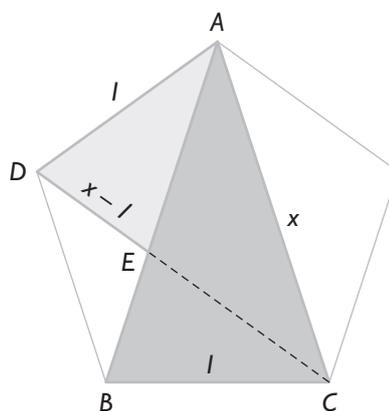
$$\log 7 + x \log 0,85 = 0$$

$$x \log 0,85 = -\log 7$$

$$x = -\frac{\log 7}{\log 0,85} = 11,97$$

Tardará casi 12 años.

99 Sabiendo que los triángulos ABC y ADE son semejantes, calcula el valor de x . ¿Qué número conocido es x ? ¿Es racional o irracional?



Solución:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solución negativa $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ no sirve.

$$\text{La solución es } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

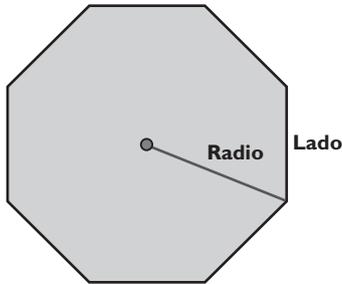
Es el número áureo o de oro.

Es irracional.

Elabora problemas de más nivel

100 Se define el número cordobés como la relación entre el radio y el lado de un octógono regular, y su valor exacto es:

$$\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$



- Racionaliza el número cordobés.
- Redondea el número cordobés a 5 cifras decimales.
- Con la calculadora halla el valor de $\frac{1}{2 \sin 22,5^\circ}$ y redondéalo a 5 decimales.
- ¿Qué observas de los apartados b) y c)?

Solución:

$$a) \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})}{2}$$

- 1,30656
- 1,30656
- Son iguales.

101 Escribe el menor intervalo cerrado, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número e

Solución:

[2, 3]

102 Escribe el menor intervalo abierto, cuyos extremos sean números enteros, que contenga al número áureo o de oro:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Solución:

(1, 2)

103 En informática 1 Kb = 2^{10} bytes, si se toma por aproximación 1 Kb = 1 000 bytes, ¿qué error absoluto y relativo estamos cometiendo?

Solución:

$$2^{10} = 1024$$

Error absoluto: 24 Error relativo: 0,023

104 Si tomamos como valor de π el dado por Mélius de 355/113, ¿qué error absoluto y relativo estamos cometiendo?

Solución:

Error absoluto: 0,00000027 Error relativo: 0,000000085

105 Si para hallar la longitud del Ecuador se toma 6 400 km como radio de la Tierra y 3,14 como valor de π , ¿qué error relativo estamos cometiendo, sabiendo que mide 40 000 km?

Solución:

Longitud aproximada: 40 192 km

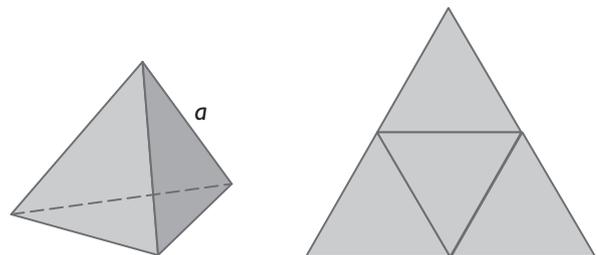
Error absoluto: 192 km Error relativo: 0,0048

106 La masa de la Tierra es $5,98 \cdot 10^{24}$ kg, y la del Sol, $1,98 \cdot 10^{30}$ kg. ¿Cuántas veces es mayor la masa del Sol que la de la Tierra?

Solución:

$$1,98 \cdot 10^{30} : (5,98 \cdot 10^{24}) = 331\,103,68 \text{ veces}$$

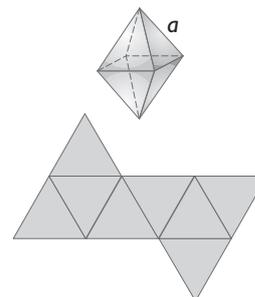
107 Halla la fórmula del área del siguiente tetraedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = a^2 \sqrt{3}$$

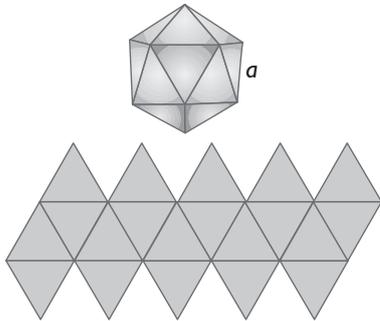
103 Halla la fórmula del área del siguiente octaedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = 2a^2 \sqrt{3}$$

- 109** Halla la fórmula del área del siguiente icosaedro regular, cuya arista mide a cm



Solución:

$$A = 5a^2 \sqrt{3}$$

- 110** Halla el volumen de un tetraedro cuya arista mide a cm

Solución:

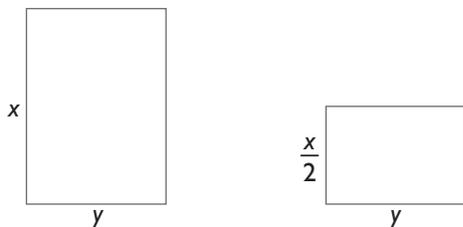
$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

- 111** Halla el volumen de un octaedro cuya arista mide a cm

Solución:

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

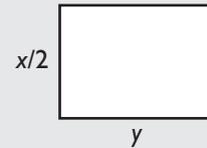
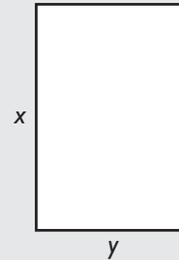
- 112** Un papel A0 mide 1 m^2 , y cuando se corta a la mitad da origen a un A1 que tiene la particularidad de que es semejante al anterior.



- Calcula de forma exacta la longitud y la anchura de un papel de formato A0
- Un A2 es la mitad de un A1, un A3 es la mitad de un A2, y un A4 es la mitad de un A3. Calcula de forma aproximada hasta los milímetros las dimensiones de un A4 (el A4 es el sustituto del folio, por la semejanza entre todos los A...; esta semejanza permite hacer fotocopias reduciendo o ampliando y manteniendo las proporciones del texto y/o dibujo y los márgenes).

Solución:

a)



$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x/2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = y^2$$

$$\text{Además: } xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 2$$

$$x = \sqrt[4]{2}, y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

b) 297 mm \times 210 mm

- 113** Sabiendo que $\log 3 = 0,4771$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

- $\log 30$
- $\log 900$
- $\log \sqrt{1/3}$
- $\log \sqrt[5]{270}$

Solución:

$$\text{a) } \log 30 = \log 3 \cdot 10 = \log 3 + \log 10 = 1,4771$$

$$\text{b) } \log 900 = \log 3^2 \cdot 100 = 2 \log 3 + \log 100 = 2,9542$$

$$\text{c) } \log \sqrt{1/3} = -\frac{\log 3}{2} = -0,2386$$

$$\text{d) } \log \sqrt[5]{270} = \frac{\log(3^3 \cdot 10)}{5} = \frac{3 \log 3 + \log 10}{5} = 0,4863$$

- 114** Sabiendo que $\log 45 = 1,6532$ y aplicando las propiedades de los logaritmos, halla los siguientes logaritmos sin utilizar la calculadora:

- $\log 4,5$
- $\log 450$
- $\log \sqrt{45}$
- $\log \sqrt[3]{4500}$

Solución:

$$\text{a) } \log 4,5 = 0,6532$$

$$\text{b) } \log 450 = 2,6532$$

$$\text{c) } \log \sqrt{45} = 0,8266$$

$$\text{d) } \log \sqrt[3]{4500} = \frac{3,6532}{3} = 1,2177$$