Saberes básicos

Unidad 3.
Clasificación de funciones

1. Estudio gráfico de una función

Explora

Indica cuál de las siguientes funciones es polinómica y cuál racional:

a) $f(x) = \dfrac{2x+5}{x^2-4}$

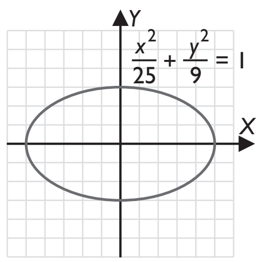
b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 4$

Solución:
a) Racional.
b) Polinómica.

Elabora

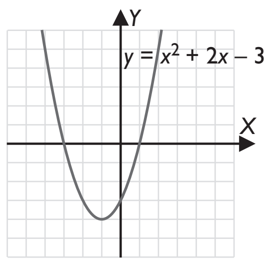
Indica si cada una de las siguientes gráficas es o no una función y razona la respuesta.

1



Solución:
No es una función. Por ejemplo, para $x = 0$ existen dos valores de y, el 3 y el -3

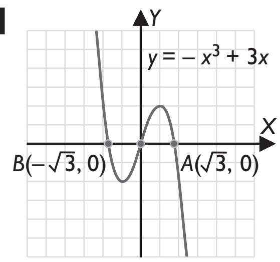
2



Solución:
Sí es una función, porque para cada valor de x existe un único valor de y

Dadas las siguientes gráficas, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.

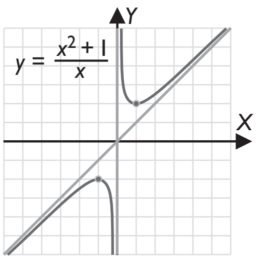
3



Solución:
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: $B(-\sqrt{3}, 0)$, $O(0, 0)$, $A(\sqrt{3}, 0)$
   – Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   – Negativa (–): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: $C(1, 2)$
   b) Mínimo relativo: $D(-1, -2)$
   Monotonía:
   – Creciente: $(-1, 1)$
   – Decreciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
   Curvatura:
   – Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0)$
   – Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

4



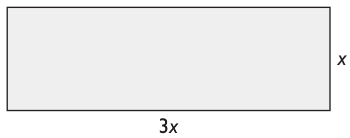
Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   – Verticales: $x = 0$
   – Horizontales: no tiene.
   – Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes: no corta a ninguno de los ejes.
   Signo:
   – Positiva (+): $(0, +\infty)$
   – Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: $A(-1, -2)$
   b) Mínimo relativo: $B(1, 2)$
   Monotonía:
   – Creciente: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Decreciente: $(-1, 0) \cup (0, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   – Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$
   – Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$
10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

2. Funciones reales de variable real

Explora

Considera los rectángulos con un lado de triple longitud que el otro. Expresa el perímetro y el área en función del lado menor.



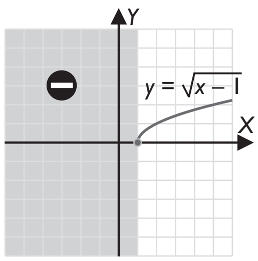
Solución:

$P(x) = 8x; A(x) = 3x^2$

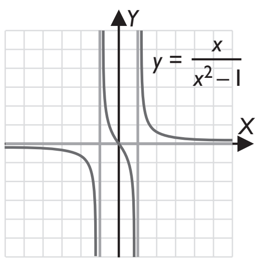
Elabora

5 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a)



b)



Solución:

a) Irracional. $\text{Dom}(f) = [1, +\infty)$
b) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

6 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5$ b) $y = \dfrac{4}{x-5}$

c) $y = \dfrac{x+3}{x^2-4}$ d) $y = \sqrt{x+1}$

Solución:

a) Polinómica. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
b) Racional.
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{5\} = (-\infty, 5) \cup (5, +\infty)$
c) Racional. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\} =$
   $= (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$
d) Irracional. $\text{Dom}(f) = [-1, +\infty)$

7 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

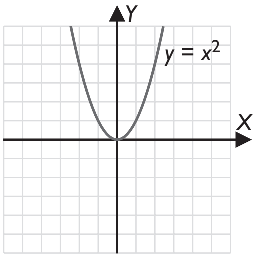
a) $y = 2^x$
b) $y = \log x$
c) $y = \log_2 (x - 3)$
d) $y = \text{sen } (x + 1)$

Solución:

a) Exponencial. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
b) Logarítmica. $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$
c) Logarítmica. $\text{Dom}(f) = (3, +\infty)$
d) Trigonométrica. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

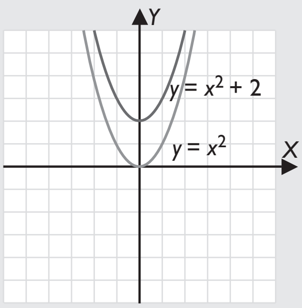
8 A partir de la gráfica de $y = f(x)$, dibuja la traslación que se pide en cada caso y halla su ecuación.

a) $f(x) + 2$
b) $f(x + 2)$
c) $f(x - 1)$
d) $f(x - 2) + 1$



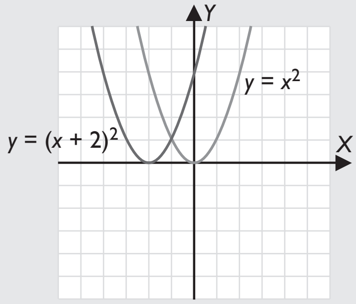
Solución:

a)



$y = x^2 + 2$

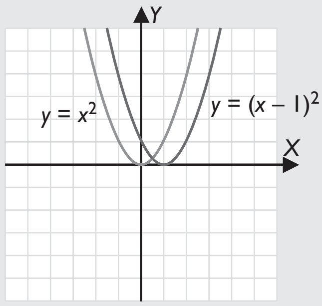
b)



$y = (x + 2)^2$

$y = x^2 + 4x + 4$

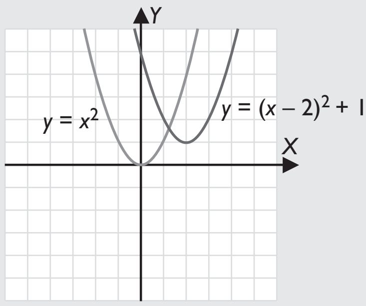
c)



$y = (x - 1)^2$

$y = x^2 - 2x + 1$

d)



$y = (x - 2)^2 + 1$

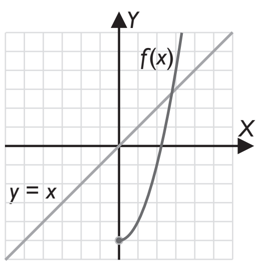
$y = x^2 - 4x + 5$

3. Operaciones con funciones

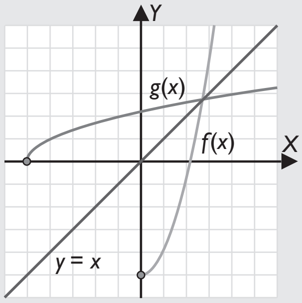
Explora

Dada la gráfica de la función $f(x)$, dibuja la gráfica $g(x)$ simétrica respecto de la recta $y = x$

Calcula el dominio y el recorrido o imagen de $f(x)$ y de $g(x)$. ¿Qué relación existe entre ellos?



Solución:



Dom(f) = $[0, +\infty)$, Im(f) = $[-5, +\infty)$

Dom(g) = $[-5, +\infty)$, Im(g) = $[0, +\infty)$

Dom(f) = Im(g) y Dom(g) = Im(f)

Elabora

9 Calcula $g \circ f$ y $f \circ g$ en cada uno de estos casos:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 2$

b) $f(x) = x^2 - 3x$ y $g(x) = x + 2$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = x + 2$, $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

b) $(g \circ f)(x) = x^2 - 3x + 2$

$(f \circ g)(x) = x^2 + x - 2$

10 Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) $y = 3x + 2$

b) $y = \sqrt{x - 1}$

c) $y = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

d) $y = x^2 + 3;\ x \geq 0$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 2}{3}$

b) $f^{-1}(x) = x^2 + 1$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 1}$

d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$

11 Indica si las siguientes funciones son pares, impares o no son ni pares ni impares, y calcula su simetría:

a) $y = x^2 - 9$

b) $y = x^2 - 4x$

c) $y = \dfrac{2}{x}$

d) $y = \dfrac{3x - 5}{x - 2}$

Solución:

a) Par ⇒ Simétrica respecto del eje Y

b) Ni par, ni impar.

c) Impar ⇒ Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

d) Ni par, ni impar.

12 Calcula la composición $f \circ g$ y $g \circ f$, siendo $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

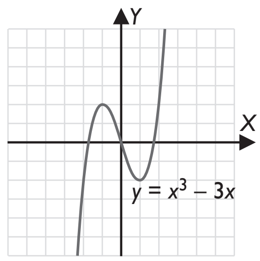
Solución:

$f \circ g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$

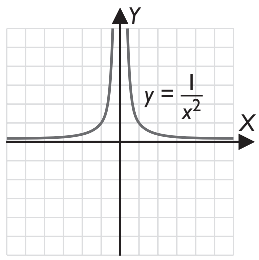
$g \circ f(x) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$

13 Indica si las siguientes funciones son pares o impares analizando la gráfica:

a)



b)



Solución:

a) Impar ⇒ Simétrica respecto del origen $O(0, 0)$

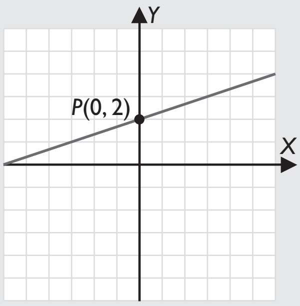
b) Par ⇒ Simétrica respecto del eje Y

4. Funciones polinómicas

Explora

Dibuja una recta que tenga de pendiente $\frac{1}{3}$ y pase por el punto $P(0, 2)$

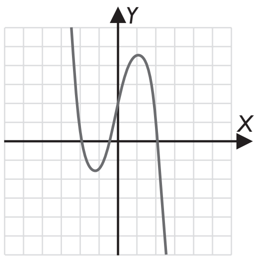
Solución:



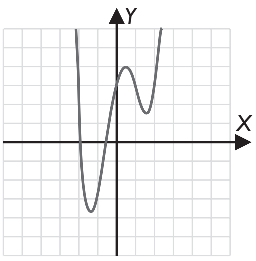
Elabora

14 Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?

a)



b)



Solución:

a) De 3.^{er} grado. El coeficiente principal es negativo.

b) De 4.º grado. El coeficiente principal es positivo.

15 Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen:

a) $y = 4$

b) $y = -2$

c) $y = \frac{3x}{2}$

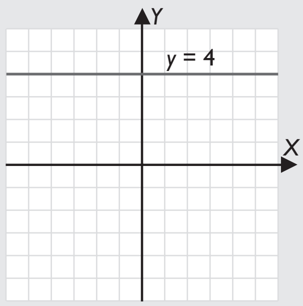
d) $y = -2x$

e) $y = x + 3$

f) $y = -\frac{2x}{3} + 4$

Solución:

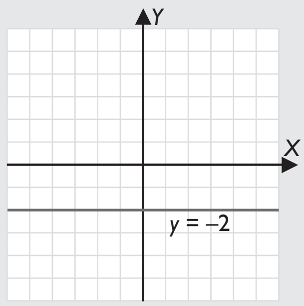
a)



$m = 0$

Ordenada en el origen: 4

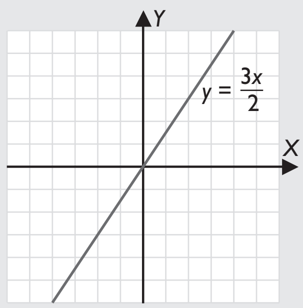
b)



$m = 0$

Ordenada en el origen: -2

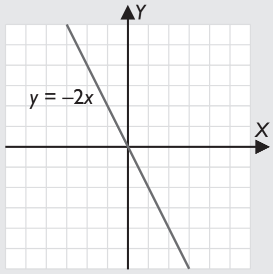
c)



$m = \frac{3}{2}$

Ordenada en el origen: 0

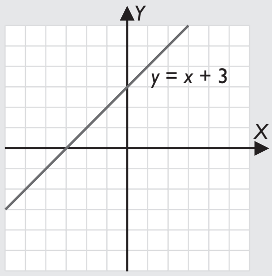
d)



$m = -2$

Ordenada en el origen: 0

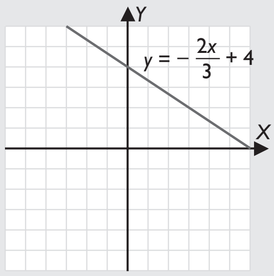
e)



$m = 1$

Ordenada en el origen: 3

f)

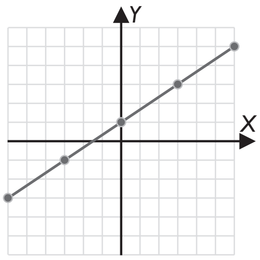


$m = -\dfrac{2}{3}$

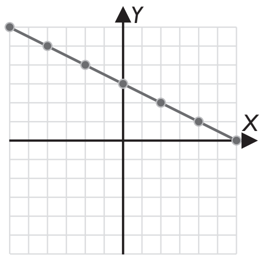
Ordenada en el origen: 4

16 Escribe la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

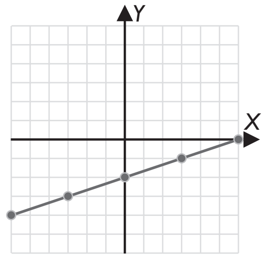
a) Recta roja



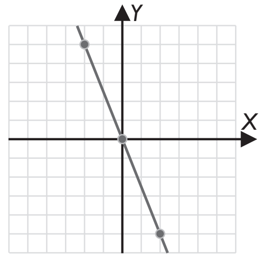
a) Recta azul



b) Recta roja



b) Recta azul



Solución:

a) Recta roja $y = \dfrac{2x}{3} + 1$

a) Recta azul $y = -\dfrac{x}{2} + 3$

b) Recta roja $y = \dfrac{x}{3} - 2$

b) Recta azul $y = -\dfrac{5x}{2}$

17 En un mercado de mochilas las funciones de oferta y demanda son $O(x) = 100 + 20x$ y $D(x) = 1\,500 - 50x$

a) Encuentra la cantidad de equilibrio.

b) ¿A qué precio se producirá una escasez de 700 mochilas?

c) A un precio de 25 €, ¿qué ocurrirá en el mercado?

Solución:

a) $O(x) = D(x) \Rightarrow 100 + 20x = 1\,500 - 50x \Rightarrow x = 20$

Para un precio de 20 € la oferta es $O(20) = 500$

La cantidad de equilibrio será de 500 mochilas a un precio de 20 €/mochila.

b) Existe escasez cuando la oferta es menor que la demanda. Si la escasez es de 700 unidades, se tiene $O(x) = D(x) - 700$

$100 + 20x = 1500 - 50x - 700 \Rightarrow 70x = 700 \Rightarrow x = 10$

Se producirá esa escasez cuando el precio sea de 10 €

c) Si $x = 25$ € se tiene $O(25) = 600$ y $D(25) = 250$

Hay exceso de oferta.

5. Funciones cuadráticas

Explora

Dada la fórmula del eje de simetría de una parábola $x = -\dfrac{b}{2a}$, despeja mentalmente b

En una parábola, se conoce el eje $x = 3$ y $a = 1$. ¿Cuánto vale b?

Solución:

$b = -2ax \Rightarrow b = -6$

Elabora

18 Representa la parábola $y = x^2$, y, a partir de ella, las siguientes funciones:

a) $y = x^2 + 1$

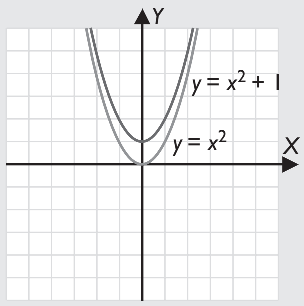
b) $y = (x + 1)^2$

c) $y = (x - 2)^2 + 3$

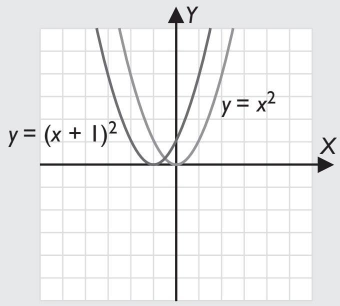
d) $y = x^2 - 5$

Solución:

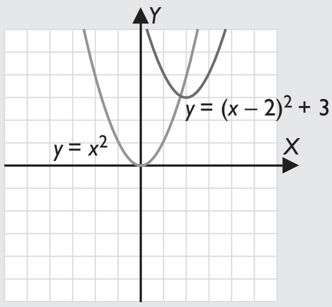
a)



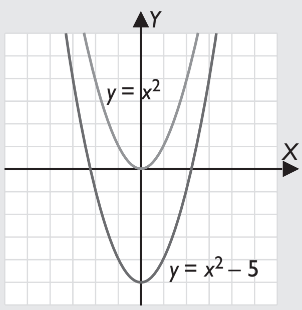
b)



c)



d)



19 Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 6x + 5$

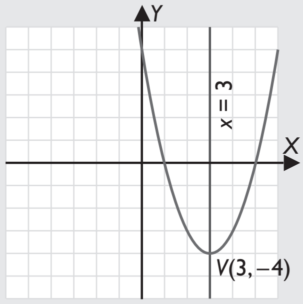
b) $y = -x^2 - 2x + 3$

c) $y = 2x^2 + 4x - 1$

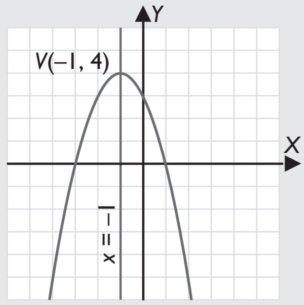
d) $y = -3x^2 - 6x + 2$

Solución:

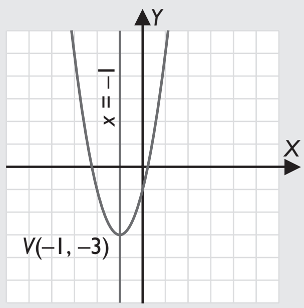
a)



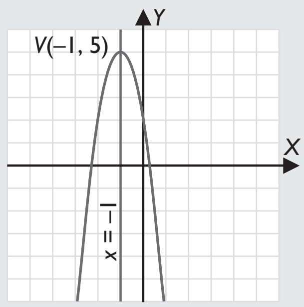
b)



c)

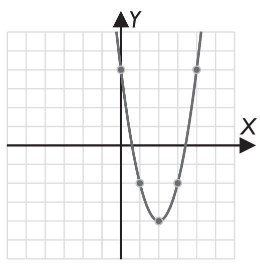


d)

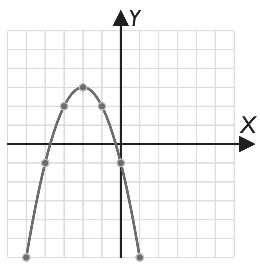


20 Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:

a)



b)

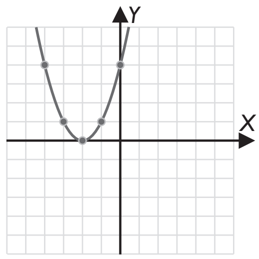


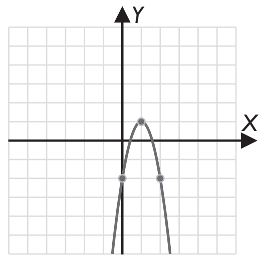
Solución:

a) $y = 2x^2 - 8x + 4$

b) $y = -x^2 - 4x - 1$

21 Halla las fórmulas de las siguientes parábolas:

a) 

b) 

Solución:

a) $y = x^2 + 4x + 4$ b) $y = -3x^2 + 6x - 2$

22 El número de bolígrafos vendidos en una papelería viene dado por la función $f(x) = 6 - x$, siendo x el precio en euros. Calcula:

a) La función de ingresos, $I(x)$

b) El número de bolígrafos que hay que vender para que los ingresos sean máximos.

Solución:

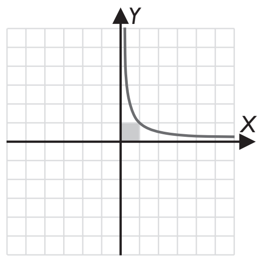
a) $I(x) = 6x - x^2$

b) $V(3, 9)$, que es el máximo. Hay que vender 3 bolígrafos.

6. Funciones racionales e irracionales

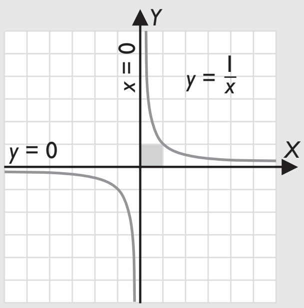
Explora

Analiza si la siguiente función $f(x) = 1/x$ es impar y dibuja en tu cuaderno la parte de gráfica que falta y las asíntotas.



Solución:

Sí es impar.



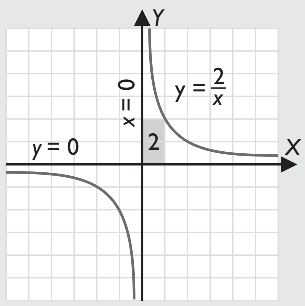
Elabora

23 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante, k, de proporcionalidad inversa:

a) $y = \dfrac{2}{x}$ b) $y = -\dfrac{4}{x}$

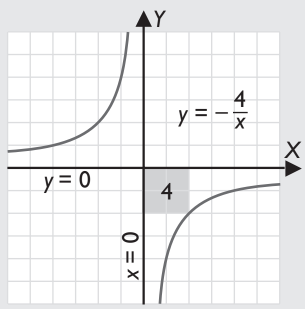
Solución:

a)



$k = 2$

b)



$k = -4$

24 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante k

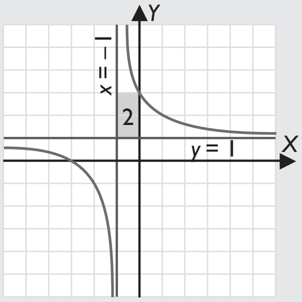
a) $y = \dfrac{x+3}{x+1}$ b) $y = \dfrac{3x-5}{x-2}$

c) $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ d) $y = -\dfrac{x+1}{x+2}$

Solución:

a)

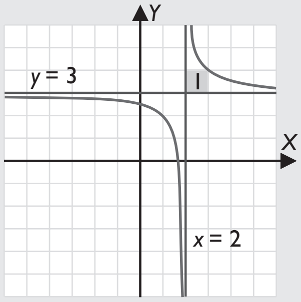
$$y = \frac{2}{x+1} + 1$$



$k = 2$

b)

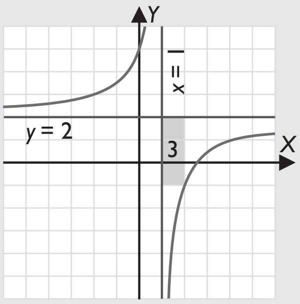
$$y = \frac{1}{x-2} + 3$$



$k = 1$

c)

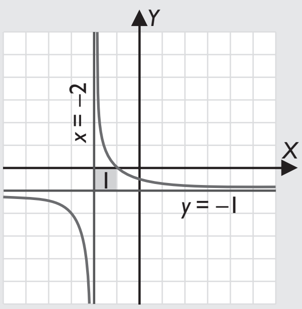
$$y = \frac{-3}{x-1} + 2$$



$k = -3$

d)

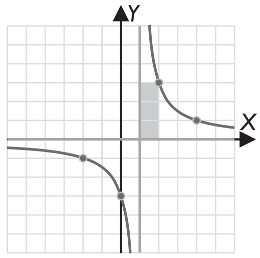
$$y = \frac{1}{x+2} - 1$$



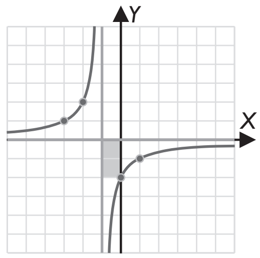
$k = 1$

25 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



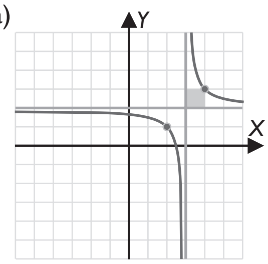
Solución:

a) $y = \dfrac{3}{x-1}$

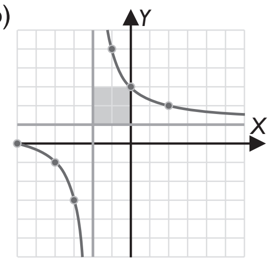
b) $y = -\dfrac{2}{x+1}$

26 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



Solución:

a) $y = \dfrac{1}{x-3} + 2$

b) $y = \dfrac{4}{x+2} + 1$

27 Dibuja las siguientes funciones irracionales:

a) $y = \sqrt{x-1}$

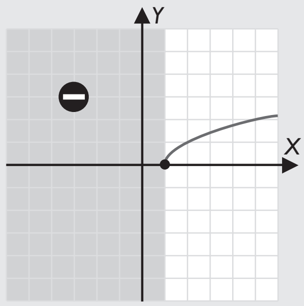
b) $y = -2 + \sqrt{x-1}$

c) $y = -\sqrt{x+2}$

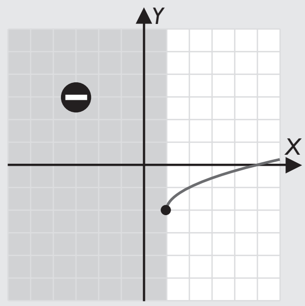
d) $y = 3 - \sqrt{2-x}$

Solución:

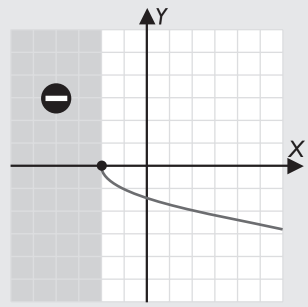
a)



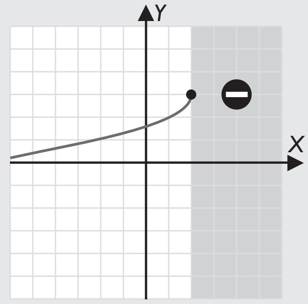
b)



c)

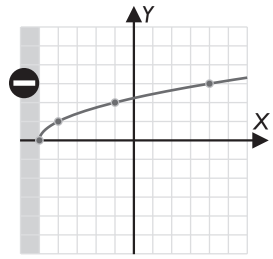


d)

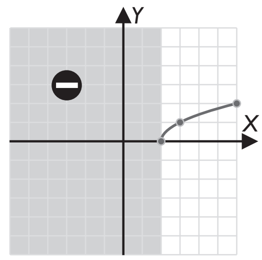


28 Escribe la fórmula de las siguientes funciones irracionales:

a)



b)



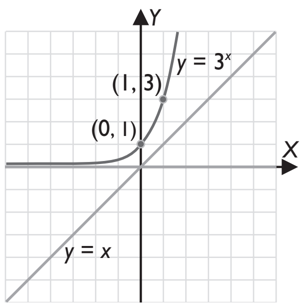
Solución:

a) $y = \sqrt{x + 5}$ b) $y = \sqrt{x - 2}$

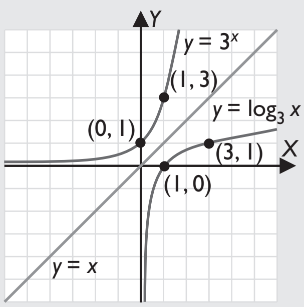
7. Funciones exponenciales y logarítmicas

Explora

Observando la gráfica correspondiente de $y = 3^x$, dibuja en tu cuaderno la gráfica de la función $y = \log_3 x$, sabiendo que es inversa de la anterior.



Solución:



Elabora

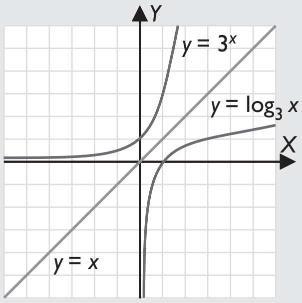
29 Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3^x$

b) $y = \log_3 x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, $y = x$; por tanto, una es inversa de la otra.

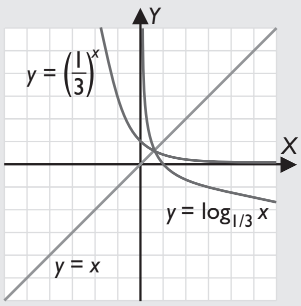
30 Dibuja en los mismos ejes las gráficas de las funciones siguientes y sus asíntotas:

a) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $y = \log_{1/3} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:



Son simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, $y = x$; por tanto, una es inversa de la otra.

31 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 1 + 2^x$

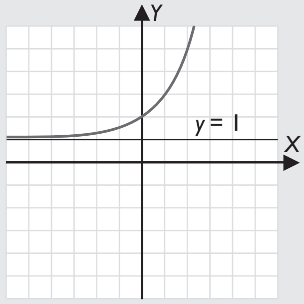
b) $y = -5 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $y = 2^{x-3}$

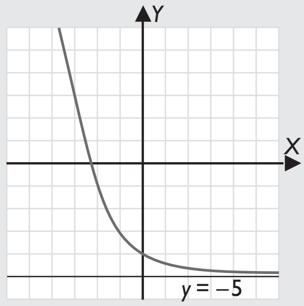
d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}$

Solución:

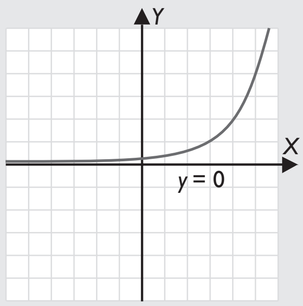
a)



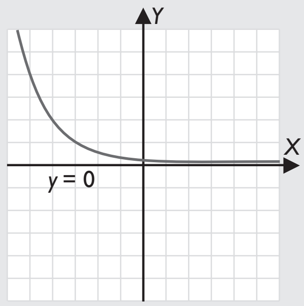
b)



c)



d)



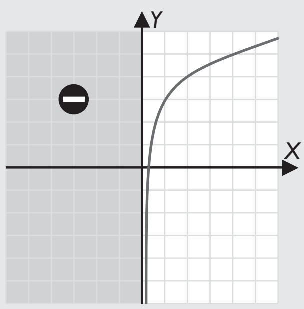
32 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3 + \log_2 x$ b) $y = -3 + \log_{1/2} x$

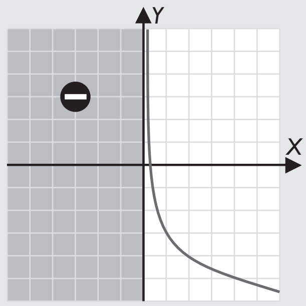
c) $y = \log_2 (x + 5)$ d) $y = \log_{1/2} (x - 1)$

Solución:

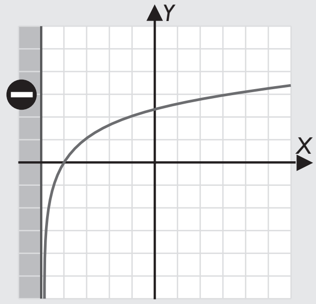
a)



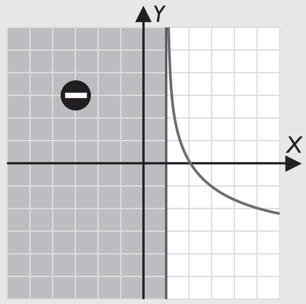
b)



c)

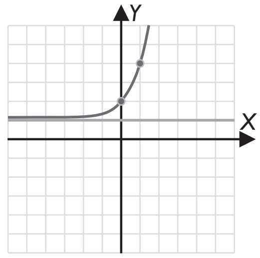


d)

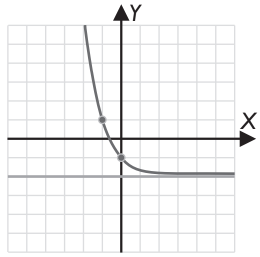


33 Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

a)



b)



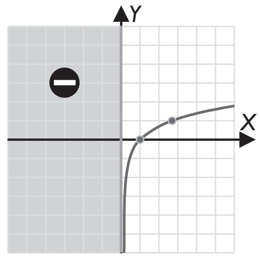
Solución:

a) $y = 1 + 3^x$

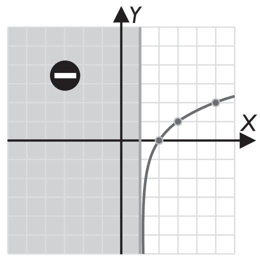
b) $y = -2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x$

34 Escribe las fórmulas de las siguientes funciones:

a)



b)



Solución:

a) $y = \ln x$

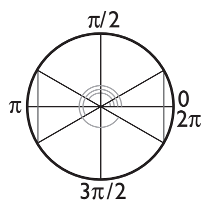
b) $y = \log_2 (x - 1)$

8. Funciones trigonométricas

Explora

Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

x	**30°**	**150°**	**210°**	**330°**
sen x				
cos x				
tg x				



Solución:

x	**30°**	**150°**	**210°**	**330°**
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Elabora

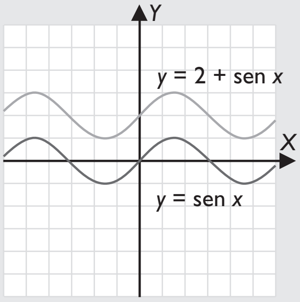
35 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \operatorname{sen} x$

a) $y = 2 + \operatorname{sen} x$

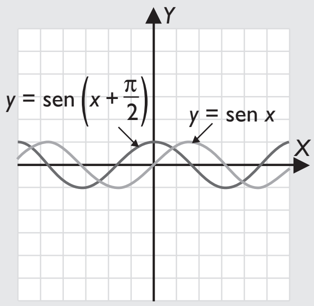
b) $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)



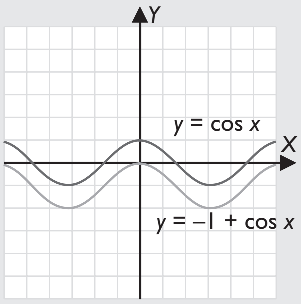
36 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \cos x$

a) $y = -1 + \cos x$

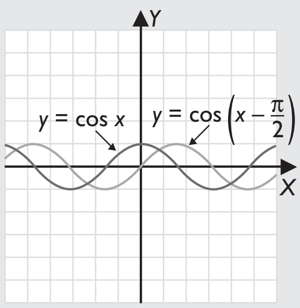
b) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)



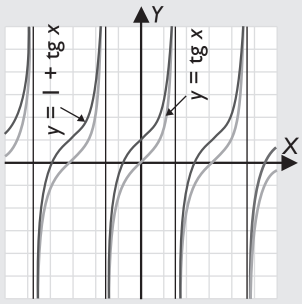
37 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \operatorname{tg} x$

a) $y = 1 + \operatorname{tg} x$

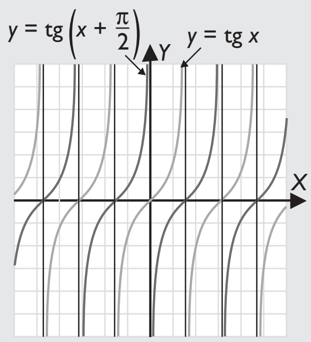
b) $y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)



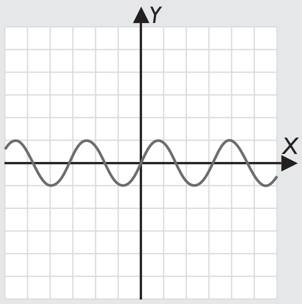
38 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen} 2x$

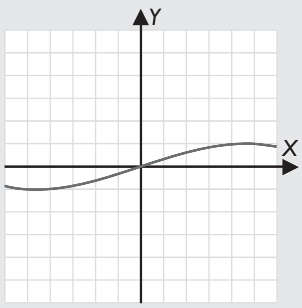
b) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{3}$

Solución:

a)



b)



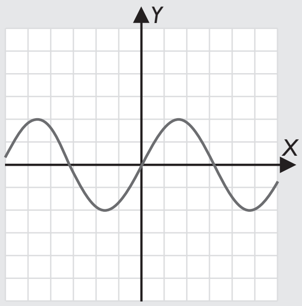
39 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = 2 \text{ sen } x$

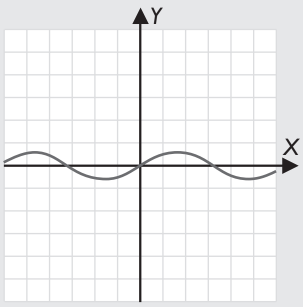
b) $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$

Solución:

a)



b)



40 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \cos 2x$

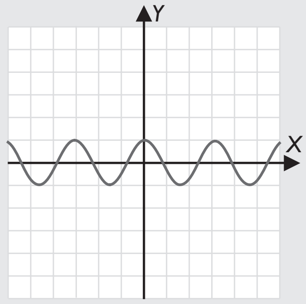
b) $y = \cos \frac{x}{3}$

c) $y = 2 \cos x$

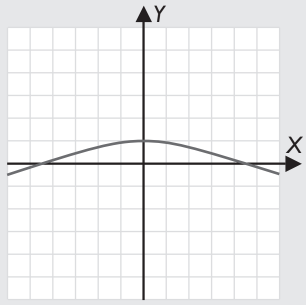
d) $y = \frac{1}{2} \cos x$

Solución:

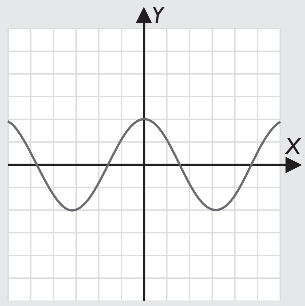
a)



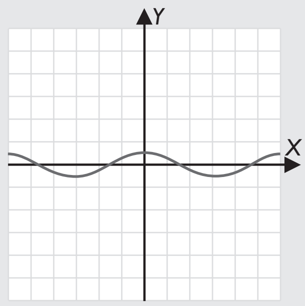
b)



c)



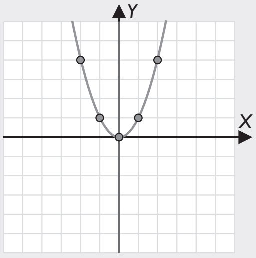
d)



Funciones elementales que hay que conocer

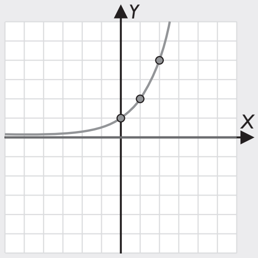
Halla el tipo de cada una de las siguientes funciones y calcula mentalmente su fórmula

1



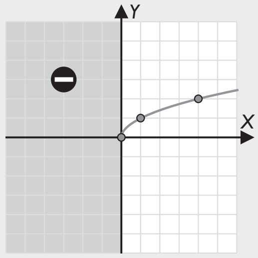
Solución:
Polinómica: $y = x^2$

2



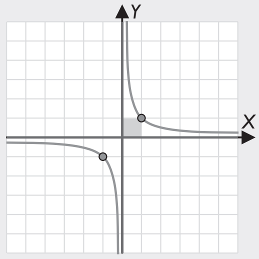
Solución:
Exponencial: $y = 2^x$

3



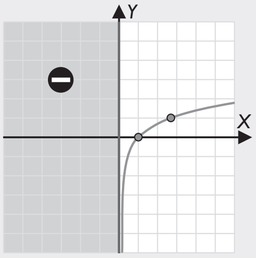
Solución:
Irracional: $y = \sqrt{x}$

4



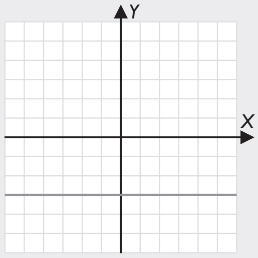
Solución:
Racional: $y = \dfrac{1}{x}$

5



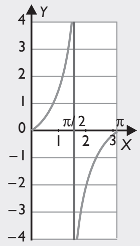
Solución:
Logarítmica: $y = \ln x$

6



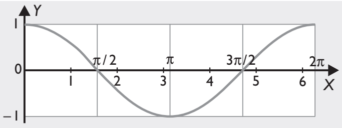
Solución:
Polinómica: $y = -3$

7



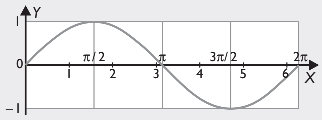
Solución:
Trigonométrica:
$y = \text{tg}\, x$

8



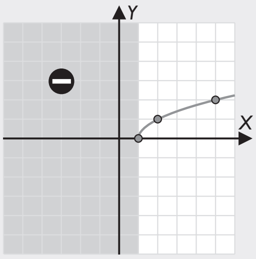
Solución: Trigonométrica: $y = \cos x$

9



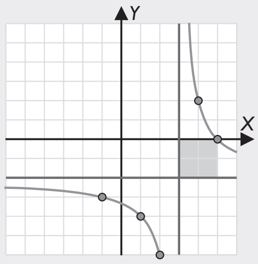
Solución: Trigonométrica: $y = \text{sen}\, x$

10



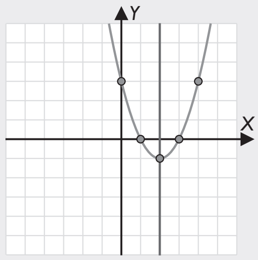
Solución:
Irracional: $y = \sqrt{x - 1}$

11



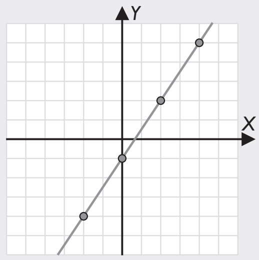
Solución:
Racional: $y = \dfrac{4}{x - 3} - 2$

12



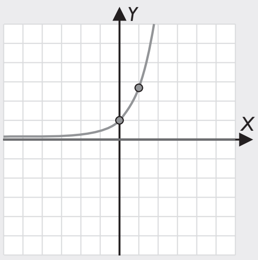
Solución:
Polinómica: $y = x^2 - 4x + 3$

13



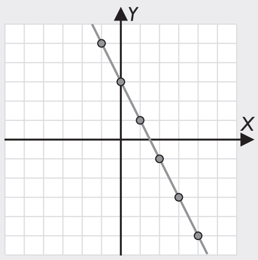
Solución:
Polinómica: $y = \dfrac{3x}{2} - 1$

14



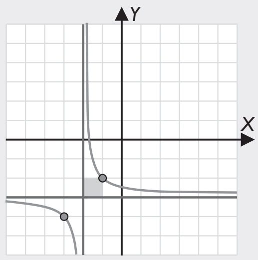
Solución:
Exponencial: $y = e^x$

15



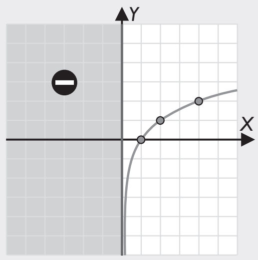
Solución:
Polinómica: $y = -2x + 3$

16



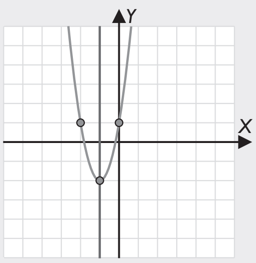
Solución:
Racional: $y = \dfrac{1}{x + 2} - 3$

17



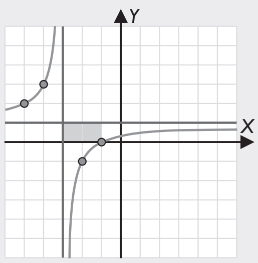
Solución:
Logarítmica: $y = \log_2 x$

18



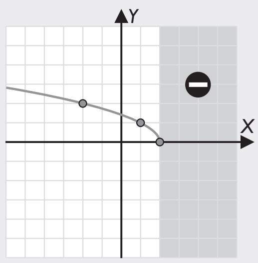
Solución:
Polinómica: $y = 3x^2 + 6x + 1$

19



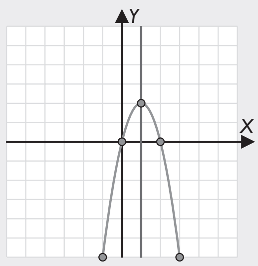
Solución:
Racional: $y = -\dfrac{2}{x + 3} + 1$

20



Solución:
Irracional: $y = \sqrt{2 - x}$

21



Solución:
Polinómica: $y = -2x^2 + 4x$

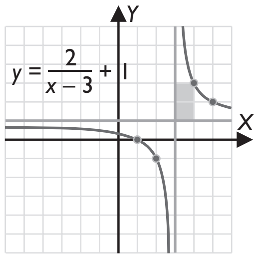
Actividades finales

Elabora actividades de las secciones

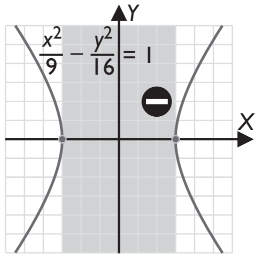
1. Estudio gráfico de una función

41 Indica cuál de las siguientes gráficas es función.

a)



b)

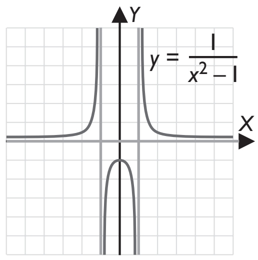


Solución:

a) Sí es función, porque para cada valor de x existe un único valor de y

b) No es función. Por ejemplo, para $x = 4$ existen dos valores de y

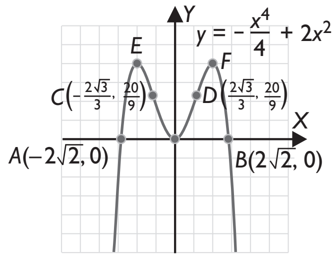
42 Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   – Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   – Horizontales: $y = 0$
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes: $A(0, -1)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   – Máximo relativo: $A(0, -1)$
   Monotonía:
   – Creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   – Decreciente: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $O(0, 0)$
   Curvatura:
   – Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

43 Dada la siguiente gráfica, estudia todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



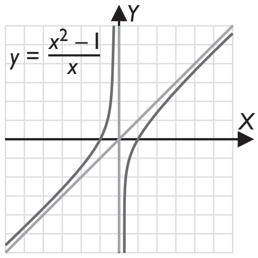
Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: $A\left(-2\sqrt{2}, 0\right), O(0, 0), B\left(2\sqrt{2}, 0\right)$
   – Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   – Positiva (+): $\left(-2\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, 2\sqrt{2}\right)$
   – Negativa (–): $\left(-\infty, -2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2}, +\infty\right)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: $E(-2, 4)$, $F(2, 4)$
   b) Mínimo relativo: $O(0, 0)$
   Monotonía:
   – Creciente: $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   – Decreciente: $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right), D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$
   Curvatura:
   – Convexa ($\cup$): $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
   – Cóncava ($\cap$): $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$
10. Recorrido o imagen:
   $\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

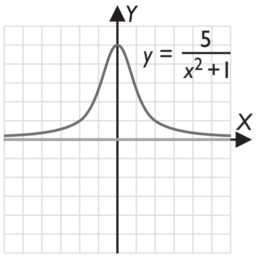
2. Funciones reales de variable real

44 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a)



b)



Solución:

a) Racional. Dom$(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Racional. Dom$(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

45 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = x^4 - x^2 + 1$ b) $y = \dfrac{2}{x+3}$

c) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 6}$ d) $y = 3 + \sqrt{x+2}$

Solución:

a) Polinómica.
Dom$(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Racional.
Dom$(f) = \mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

c) Racional.
Dom$(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, +\infty)$

d) Irracional.
Dom$(f) = [-2, +\infty)$

46 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = 2x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ b) $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$

c) $y = \dfrac{x}{(x-2)^2}$ d) $y = \sqrt{4 - 2x}$

Solución:

a) Polinómica.
Dom$(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Racional.
Dom$(f) = \mathbb{R} - \{-1, 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

c) Racional.
Dom$(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

d) Irracional.
Dom$(f) = (-\infty, 2]$

47 Clasifica las siguientes funciones y halla su dominio:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$

c) $y = \ln(x - 2)$ d) $y = \cos(x - \pi)$

Solución:

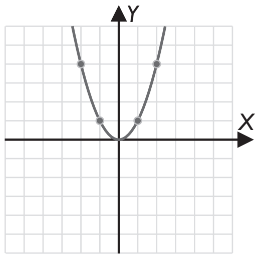
a) Exponencial. Dom$(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) Exponencial. Dom$(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

c) Logarítmica. Dom$(f) = (2, +\infty)$

d) Trigonométrica. Dom$(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

48 A partir de la gráfica de $y = f(x)$, dibuja las gráficas siguientes y halla su ecuación:

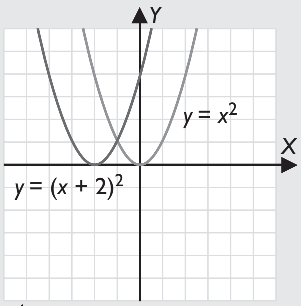


a) $y = f(x + 2)$ b) $y = f(x) - 5$

c) $y = f(x - 3) + 1$ d) $y = f(x + 1) - 2$

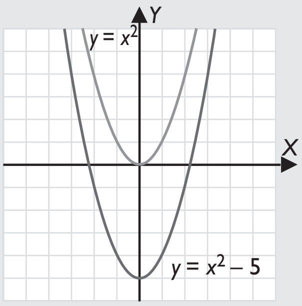
Solución:

a)



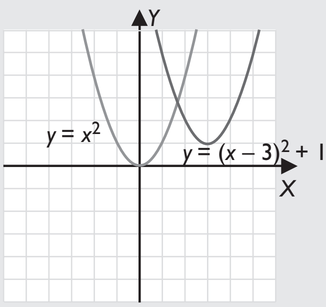
$y = x^2 + 4x + 4$

b)



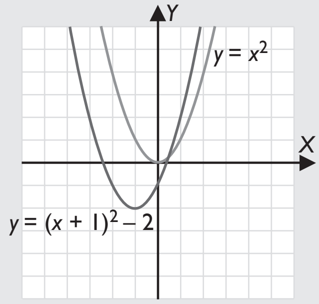
$y = x^2 - 5$

c)



$y = x^2 - 6x + 10$

d)

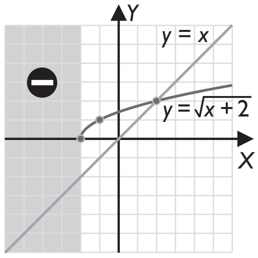


$y = x^2 + 2x - 1$

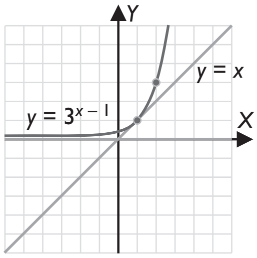
3. Operaciones con funciones

49 Dibuja la función inversa de $y = f(x)$ en cada caso y halla su fórmula.

a)

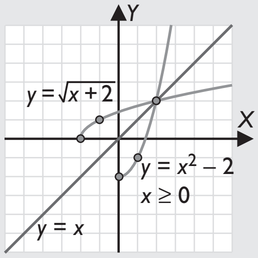


b)

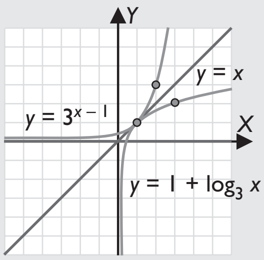


Solución:

a)



b)



50 Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:

a) g ∘ f b) f ∘ g

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ b) $(f \circ g)(x) = x - 4$

51 Dadas las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = 2x + 1$, calcula:

a) g ∘ f b) $f \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = 1 + 2 \text{ sen } x$

b) $(f \circ g)(x) = \text{sen } (2x + 1)$

52 Calcula la función inversa de $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -3x + 2$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x - 1}{2}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{2 - x}{3}$

53 Calcula la función inversa de $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y = \dfrac{x}{x + 3}$

b) $y = x^2 - 4;\ x \geq 0$

Solución:

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x}{1 - x}$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$

54 Indica si las siguientes funciones son pares, impares o ni pares ni impares, y calcula su simetría:

a) $y = x$ b) $y = x + 3$

c) $y = \dfrac{3}{x}$ d) $y = x^2 + 2$

Solución:

a) Es impar ⇒ Simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$

b) No es par, ni impar.

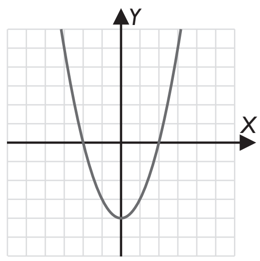
c) Es impar ⇒ Simétrica respecto del origen de coordenadas $O(0, 0)$

d) Es par ⇒ Simétrica respecto del eje Y

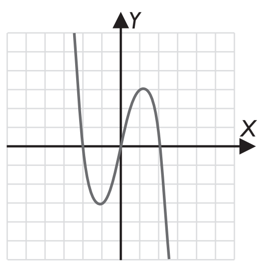
4. Funciones polinómicas

55 Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?

a)



b)



Solución:

a) De 2.º grado. El coeficiente principal es positivo.

b) De 3.er grado. El coeficiente principal es negativo.

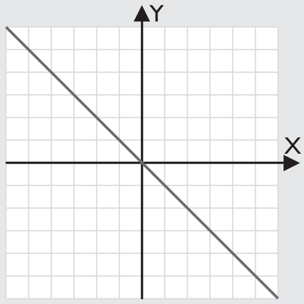
56 Representa las siguientes rectas, halla la pendiente y la ordenada en el origen.

a) $y = -x$ b) $y = -\dfrac{x}{2}$

c) $y = \dfrac{3x}{2} + 1$ d) $y = -2x - 1$

Solución:

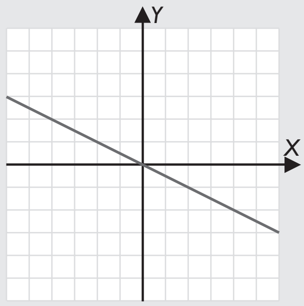
a)



$m = -1$

Ordenada en el origen: 0

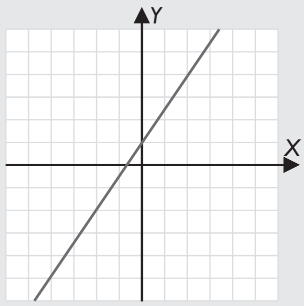
b)



$m = -\dfrac{1}{2}$

Ordenada en el origen: 0

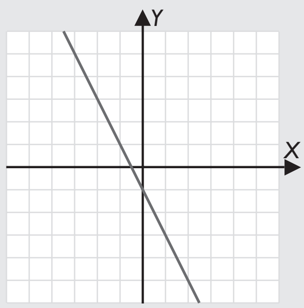
c)



$m = \dfrac{3}{2}$

Ordenada en el origen: 1

d)

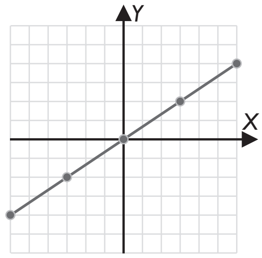


$m = -2$

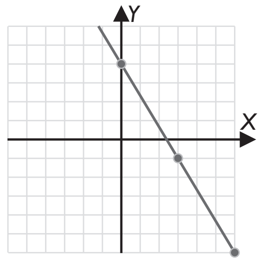
Ordenada en el origen: -1

57 Escribe las fórmulas de las siguientes rectas:

a)



b)



Solución:

a) $y = \dfrac{2x}{3}$

b) $y = -\dfrac{5x}{3} + 4$

58 En un mercado de bicicletas de paseo las funciones de oferta y demanda son respectivamente:

$O(x) = 34x - 100$ y $D(x) = 20\,000 - 100x$

a) Encuentra la cantidad de equilibrio.

b) ¿A qué precio escasearán 6 700 bicicletas?

c) A un precio de 175 €, ¿qué ocurrirá en el mercado?

Solución:

a) $O(x) = D(x) \Rightarrow 34x - 100 = 20000 - 100x \Rightarrow x = 150$

Para un precio de 150 € la oferta es O(150) = 5000

La cantidad de equilibrio será de 5000 bicicletas a 150 €

b) $O(x) = D(x) - 6\,700$

$34x - 100 = 20\,000 - 100x - 6\,700 \Rightarrow x = 100$

Se producirá esa escasez cuando el precio sea de 100 €

c) Si $x = 175$ € se tiene $O(175) = 5\,850$ y $D(175) = 2500$

Hay exceso de oferta.

5. Funciones cuadráticas

59 Representa la parábola $y = 2x^2$; a partir de ella, las siguientes:

a) $y = 2(x - 1)^2$

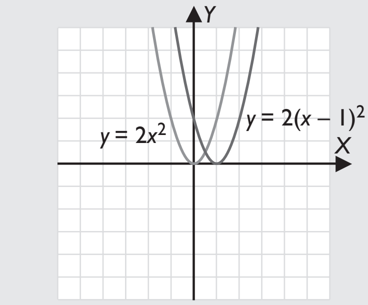
b) $y = 2x^2 - 3$

c) $y = 2(x + 2)^2$

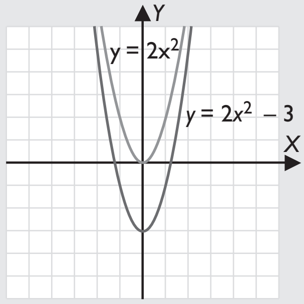
d) $y = 2(x + 1)^2 + 2$

Solución:

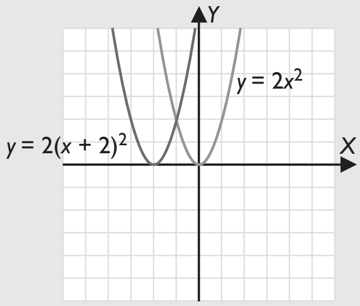
a)



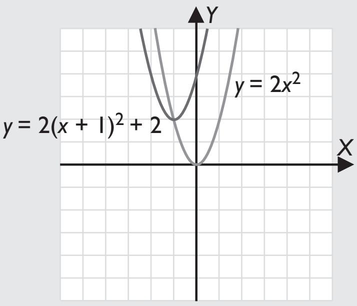
b)



c)



d)



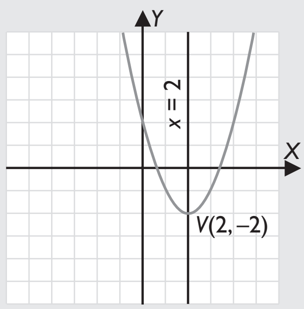
60 Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 4x + 2$ b) $y = -x^2 - 2x + 1$

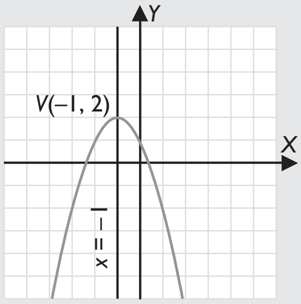
c) $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x - 3$ d) $y = -2x^2 + 4x + 3$

Solución:

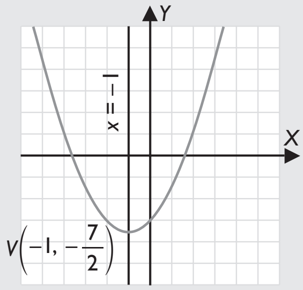
a)



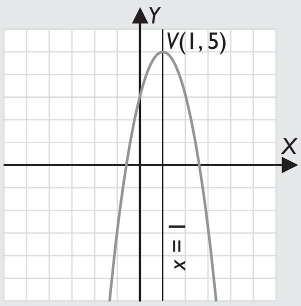
b)



c)

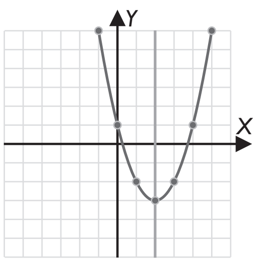


d)

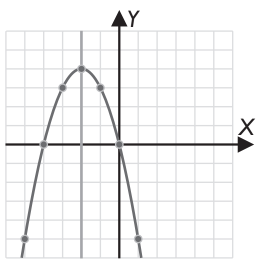


61 Escribe las fórmulas de las siguientes parábolas:

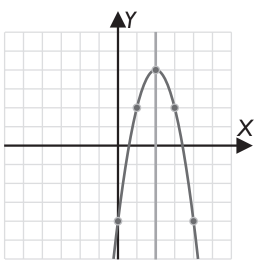
a)



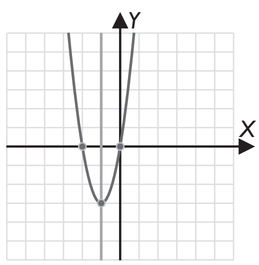
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = x^2 - 4x + 1$

b) $y = -x^2 - 4x$

c) $y = -2x^2 + 8x - 4$

d) $y = 3x^2 + 6x$

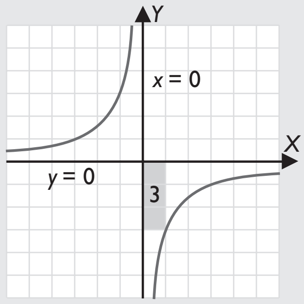
6. Funciones racionales e irracionales

62 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante, k, de proporcionalidad inversa.

a) $y = -\dfrac{3}{x}$ b) $y = \dfrac{2}{x}$

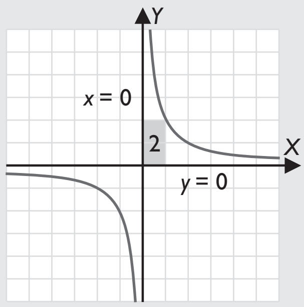
Solución:

a)



$k = -3$

b)



$k = 2$

63 Dibuja las siguientes hipérbolas y sus asíntotas. Halla la constante k

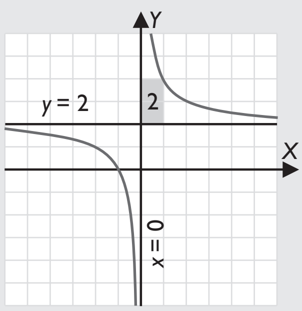
a) $y = \dfrac{2x+2}{x}$ b) $y = \dfrac{3x+7}{x+2}$

c) $y = \dfrac{-2x-6}{x+1}$ d) $y = \dfrac{-2x+3}{x}$

Solución:

a)

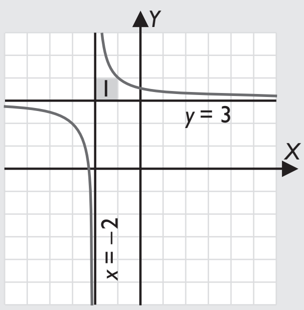
$y = \dfrac{2}{x} + 2$



$k = 2$

b)

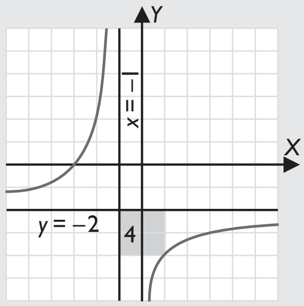
$y = \dfrac{1}{x+2} + 3$



$k = 1$

c)

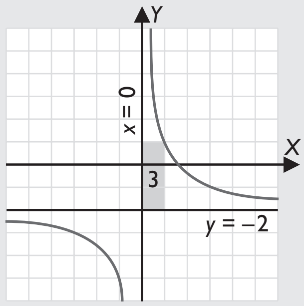
$y = \dfrac{-4}{x+1} - 2$



$k = -4$

d)

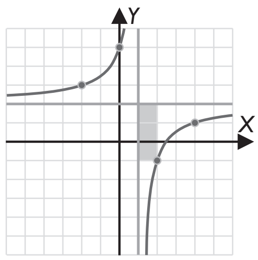
$y = \dfrac{3}{x} - 2$



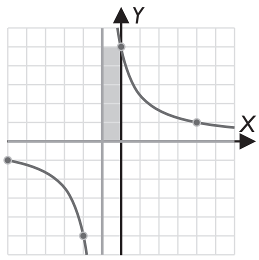
$k = 3$

64 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



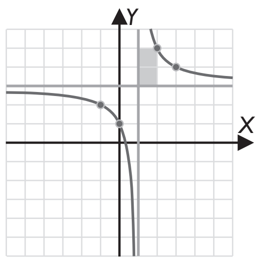
Solución:

a) $y = -\dfrac{3}{x-1} + 2$

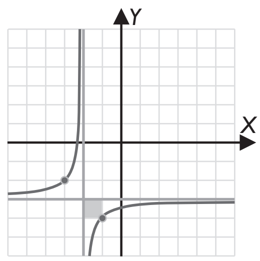
b) $y = \dfrac{5}{x+1}$

65 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

a)



b)



Solución:

a) $y = \dfrac{2}{x-1} + 3$

b) $y = -\dfrac{1}{x+2} - 3$

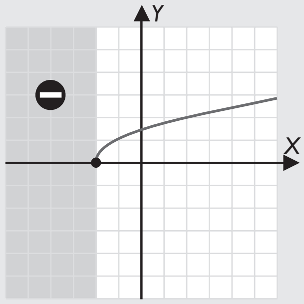
66 Dibuja las siguientes funciones irracionales:

a) $y = \sqrt{x + 2}$ b) $y = -3 + \sqrt{x + 2}$

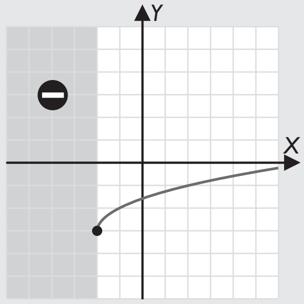
c) $y = -\sqrt{x - 3}$ d) $y = 2 - \sqrt{x - 3}$

Solución:

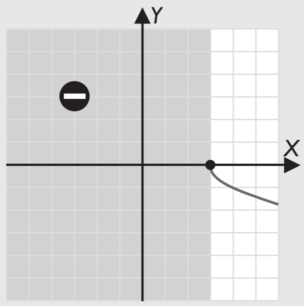
a)



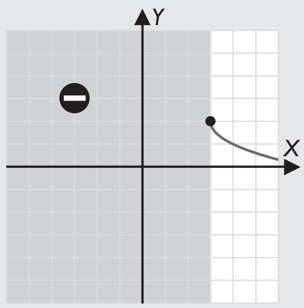
b)



c)



d)



7. Funciones exponenciales y logarítmicas

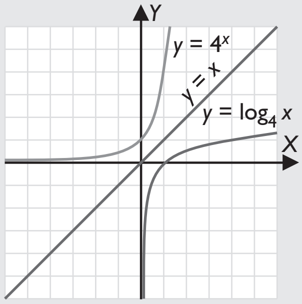
67 Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 4^x$ b) $y = \log_4 x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:

Son simétricas respecto de la bisectriz del 1.^{er} y 3.^{er} cuadrantes; $y = x$; por tanto, una es inversa de la otra.



68 Dibuja en los mismos ejes las siguientes funciones y sus asíntotas:

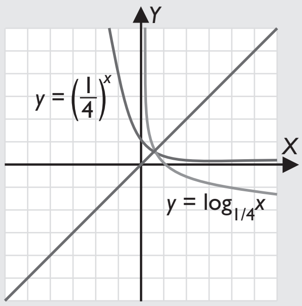
a) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

b) $y = \log_{1/4} x$

¿Respecto a qué recta son simétricas?

Solución:

Son simétricas respecto de la bisectriz del 1.^{er} y 3.^{er} cuadrantes; $y = x$, por tanto, una es inversa de la otra.



69 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = 3^{x-2}$

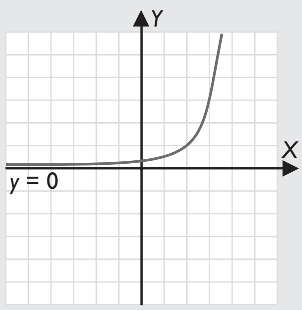
b) $y = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) $y = -1 + 2^{x+1}$

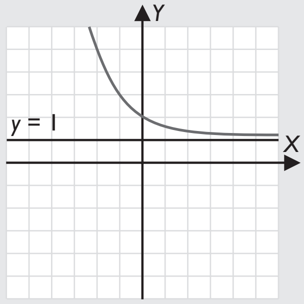
d) $y = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

Solución:

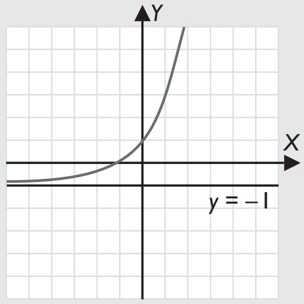
a)



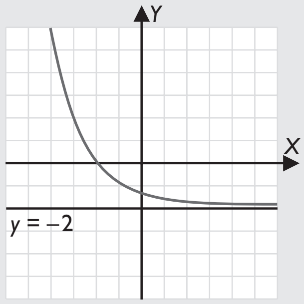
b)



c)



d)



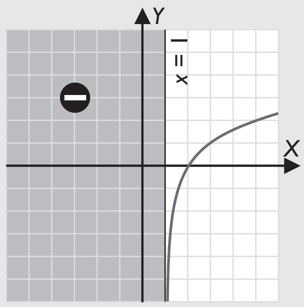
70 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y sus asíntotas:

a) $y = \log_2 (x - 1)$ b) $y = 3 + \log_{1/2} x$

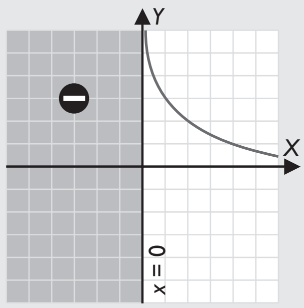
c) $y = -1 + \log_3 (x - 2)$ d) $y = 2 + \log_{1/3} (x + 1)$

Solución:

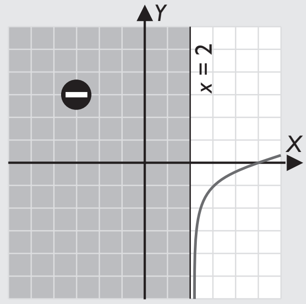
a)



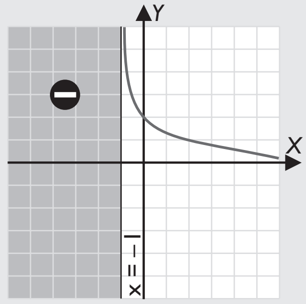
b)



c)

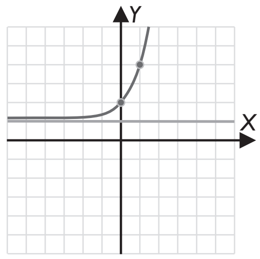


d)

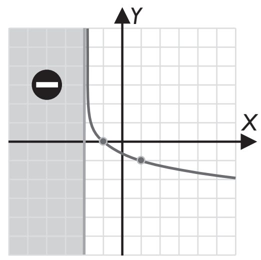


71 Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

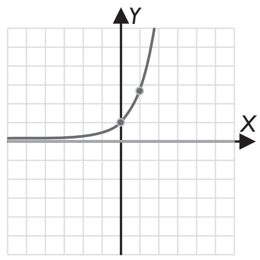
a)



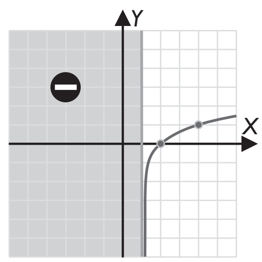
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = 1 + 3^x$

b) $y = \log_{1/3} (x + 2)$

c) $y = e^x$

d) $y = \log_3 (x - 1)$

8. Funciones trigonométricas

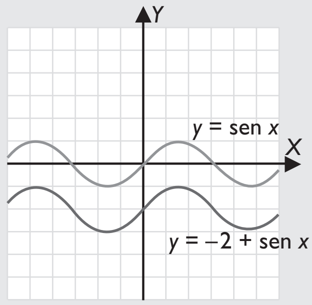
72 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \operatorname{sen} x$

a) $y = -2 + \operatorname{sen} x$

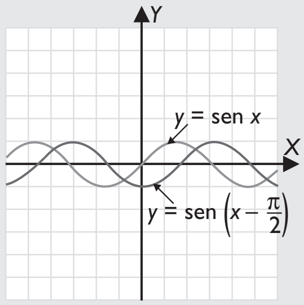
b) $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)



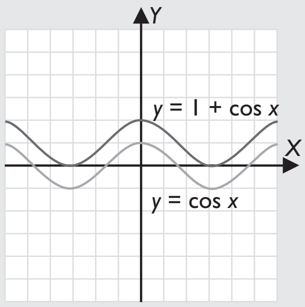
73 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \cos x$

a) $y = 1 + \cos x$

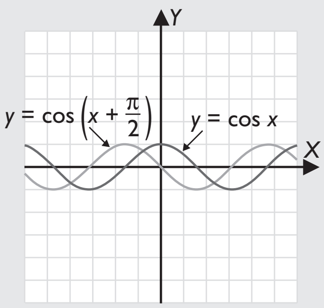
b) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)

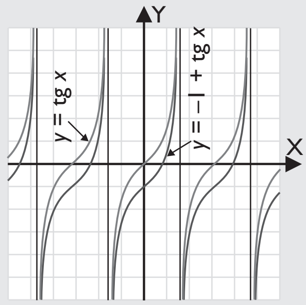


74 Dibuja las siguientes funciones a partir de la función $y = \operatorname{tg} x$

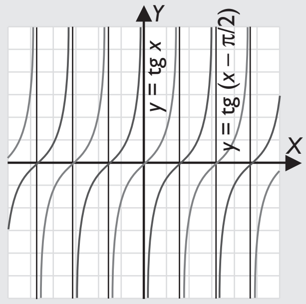
a) $y = -1 + \operatorname{tg} x$ b) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Solución:

a)



b)



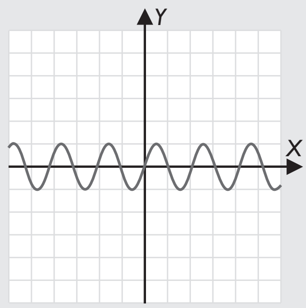
75 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen} 3x$

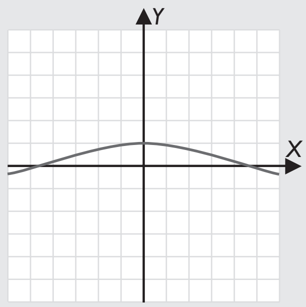
b) $y = \cos \dfrac{x}{3}$

Solución:

a)



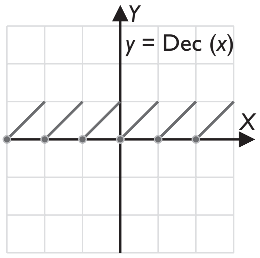
b)



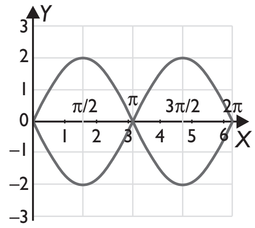
Elabora actividades para reforzar

76 Indica cuál de las siguientes gráficas es función:

a)



b)

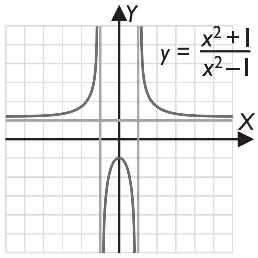


Solución:

a) Es función: $y = \text{Dec}(x)$

b) No es función.

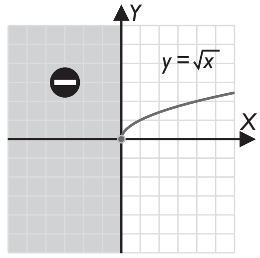
77 Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} =$
   $= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$ y en $x = 1$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   – Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   – Horizontales: $y = 1$
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: no corta.
   – Eje Y: $A(0, -1)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: $A(0, -1)$
   b) Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   – Creciente: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
   – Decreciente: $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   – Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   – Cóncava ($\cap$): $(-1, 1)$
10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

78 Dada la siguiente gráfica, halla todas sus características. Es decir, completa el formulario de los diez apartados.



Solución:

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en $[0, +\infty)$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica.
6. Asíntotas:
   – Verticales: no tiene.
   – Horizontales: no tiene.
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: $O(0, 0)$
   – Eje Y: $O(0, 0)$
   Signo:
   – Positiva (+): $(0, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: no tiene.
   b) Mínimo relativo: no tiene.
   Monotonía:
   – Creciente: $(0, +\infty)$
   – Decreciente: $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.
   Curvatura:
   – Convexa ($\cup$): $\varnothing$
   – Cóncava ($\cap$): $(0, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

79 Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x-5}}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (5, +\infty)$

b) $\text{Dom}(f) = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

80 Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = \ln \dfrac{x+2}{x-3}$ b) $y = \ln \sqrt{x}$

c) $y = \text{sen}\, \dfrac{2}{x}$ d) $y = e^{\sqrt{x}}$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

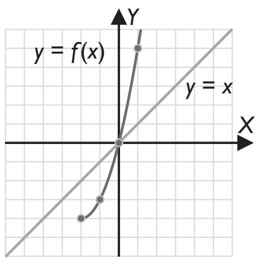
b) $\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

c) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

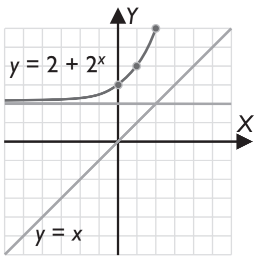
d) $\text{Dom}(f) = [0, +\infty)$

81 Dibuja la función inversa de $y = f(x)$ en cada caso:

a)

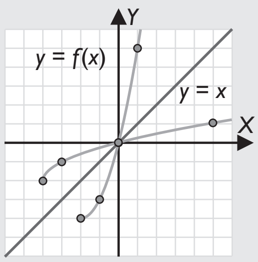


b)

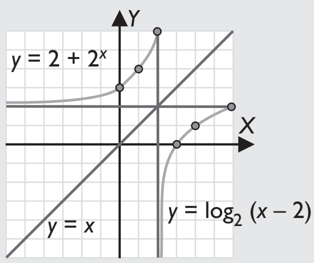


Solución:

a)



b)



82 Dadas las funciones $f(x) = \text{tg}\, x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, calcula:

a) $g \circ f$ b) $f \circ g$

c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

Solución:

a) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{\text{tg}\, x}$ b) $(f \circ g)(x) = \text{tg}\, \dfrac{1}{x}$

c) $(f \circ f)(x) = \text{tg}\, (\text{tg}\, x)$ d) $(g \circ g)(x) = x$

83 Calcula la función inversa de la función $y = f(x)$ en los siguientes casos:

a) $y = \sqrt{x+2}$

b) $y = x^2 - 5$

c) $y = \dfrac{x}{x-3}$

d) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$

Solución:

a) $y = x^2 - 2$ si $x \geq 0$

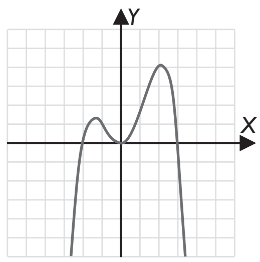
b) $y = \sqrt{x+5}$

c) $y = \dfrac{3x}{x-1}$

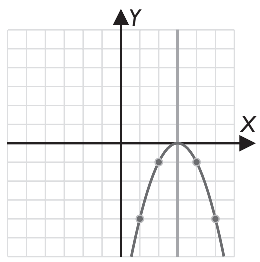
d) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$

84 Analiza de qué grado pueden ser las funciones polinómicas siguientes. ¿Qué signo tiene el coeficiente principal?

a)



b)



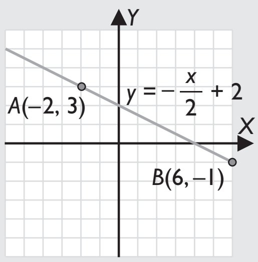
Solución:

a) Es de grado cuatro.
El coeficiente principal es negativo.

b) Es de grado dos.
El coeficiente principal es negativo.

85 Dibuja la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(6, -1)$, y halla su fórmula.

Solución:



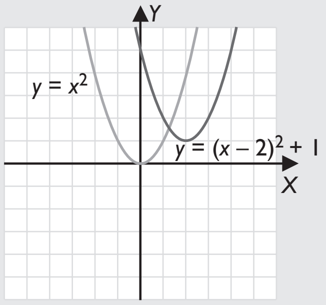
86 Representa la parábola $f(x) = x^2$; a partir de ella, las siguientes funciones:

a) $f(x - 2) + 1$

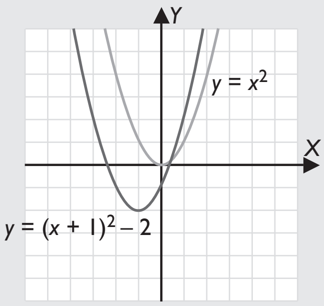
b) $f(x + 1) - 2$

Solución:

a)



b)



87 Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

a) $A(0, -1)$, $B(2, -5)$ y $C(5, 4)$

b) $A(3, 4)$, $B(4, 2)$ y $C(1, -4)$

Solución:

a) $y = x^2 - 4x - 1$

b) $y = -2x^2 + 12x - 14$

88 Calcula la función cuadrática que pasa por los puntos siguientes:

a) $A(2, 0)$, $B(3, 1)$ y $C(4, 4)$

b) $A(-1, 2)$, $B(-3, -2)$ y $C(-5, 2)$

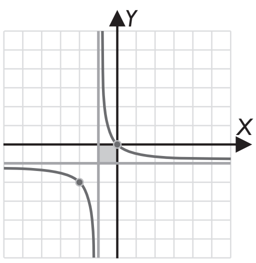
Solución:

a) $y = x^2 - 4x + 4$

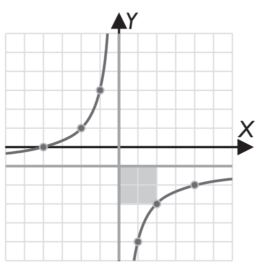
b) $y = x^2 + 6x + 7$

89 Escribe las fórmulas de las siguientes hipérbolas:

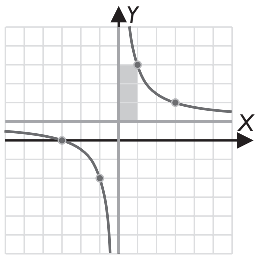
a)



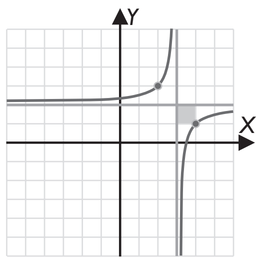
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = \dfrac{1}{x + 1} - 1$

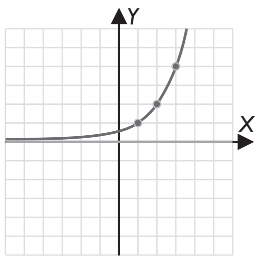
b) $y = -\dfrac{4}{x} - 1$

c) $y = \dfrac{3}{x} + 1$

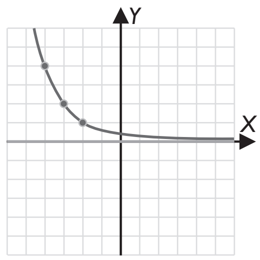
d) $y = -\dfrac{1}{x - 3} + 2$

90 Escribe las fórmulas de las siguientes gráficas:

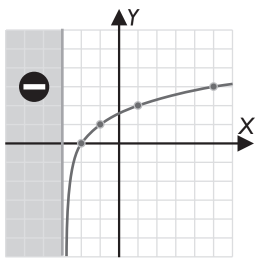
a)



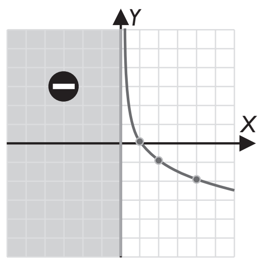
b)



c)



d)



Solución:

a) $y = 2^{x - 1}$

b) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x + 2}$

c) $y = \log_2 (x + 3)$

d) $y = \log_{1/2} x$

91 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = 2 \operatorname{sen} x$

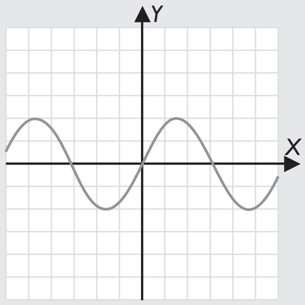
b) $y = \operatorname{sen} 2x$

c) $y = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} x$

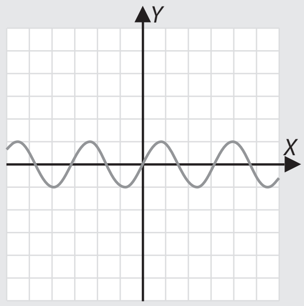
d) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

Solución:

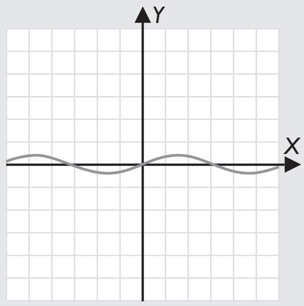
a)



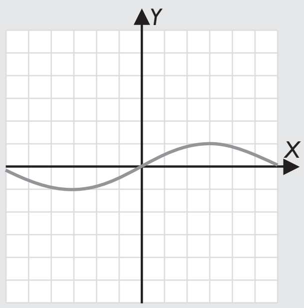
b)



c)



d)



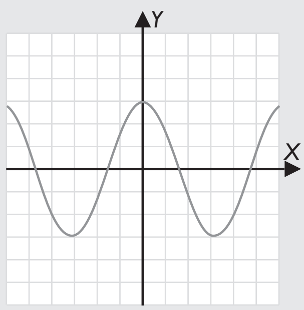
92 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = 3 \cos x$ b) $y = \cos 3x$

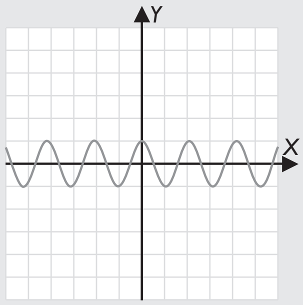
c) $y = \frac{1}{3} \cos x$ d) $y = \cos \frac{x}{3}$

Solución:

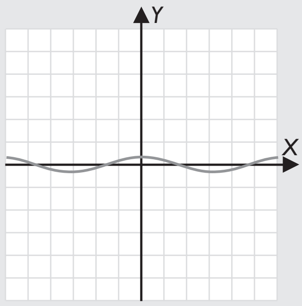
a)



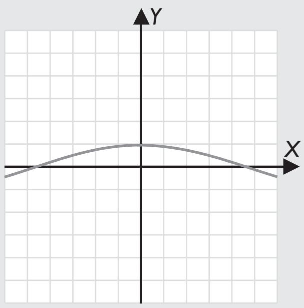
b)



c)



d)



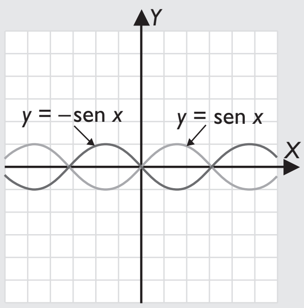
93 Dibuja las siguientes funciones a partir de $y = \text{sen } x$

a) $y = -\text{sen } x$

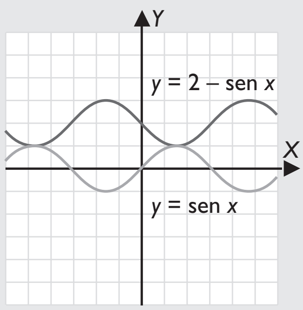
b) $y = 2 - \text{sen } x$

Solución:

a)



b)



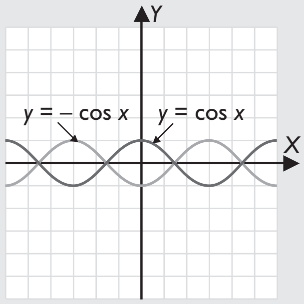
94 Dibuja las siguientes funciones a partir de $y = \cos x$

a) $y = -\cos x$

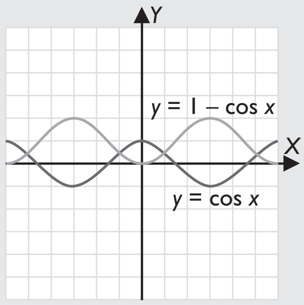
b) $y = 1 - \cos x$

Solución:

a)



b)



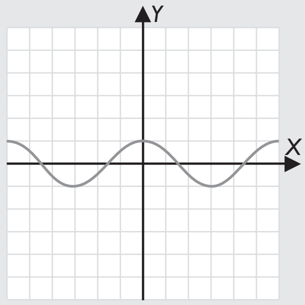
95 Dibuja las siguientes funciones:

a) $y = \cos x$ b) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

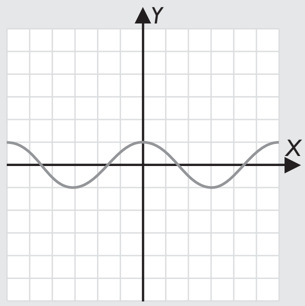
¿Qué observas?

Solución:

a)



b)

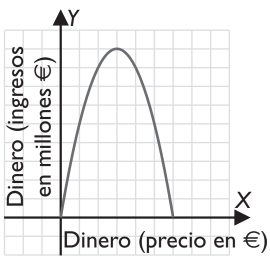


Se observa que son la misma gráfica, luego:

$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Elabora problemas

96 En la gráfica adjunta se representan los ingresos en función del precio de cada cuaderno que fabrica una empresa y que se vende. Describe las características de la gráfica.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = [0, 6]$
3. Continuidad: es continua en su dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: simétrica respecto a $x = 3$
6. Asíntotas:
   – Verticales: no tiene.
   – Horizontales: no tiene.
   – Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   – Eje X: $O(0, 0)$ y $A(6, 0)$
   – Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   – Positiva (+): $A(0, 6)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   a) Máximo relativo: $B(3, 9)$

   Para 3 € se alcanzan unos ingresos de 9 millones.

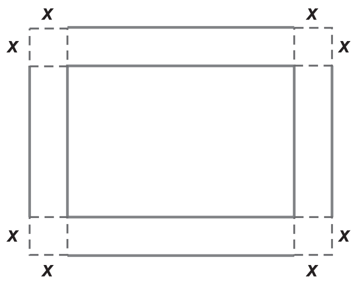
   b) Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   – Creciente: (0, 3)
   – Decreciente: (3, 6)
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   – Cóncava ($\cap$): (0, 6)
10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [0, 9]$

97 En un cartón rectangular de 8 cm de largo por 6 cm de ancho, se cortan, en los vértices, cuatro cuadrados de x cm de lado para construir una caja. Escribe la función que da el volumen de dicha caja en función de la longitud x y calcula su dominio de definición.



Solución:

$V(x) = (8 - 2x)(6 - 2x)\,x$

$V(x) = 4x^3 - 28x^2 + 48x$

$\text{Dom}(V) = [0, 3]$

98 El perímetro de un rectángulo mide 10 m. Expresa el área del rectángulo en función del lado x de la base. Calcula el dominio de definición de la función.

Solución:

$A(x) = x(5 - x)$

$A(x) = 5x - x^2$

$\text{Dom}(A) = [0, 5]$

99 El precio de venta al público de una revista en función del número, en miles, de ejemplares editados, x, es

$$p(x) = 4 - \frac{x}{2}$$

Escribe la función de los ingresos que se obtienen, dependiendo de los ejemplares editados, y calcula el dominio de definición.

Solución:

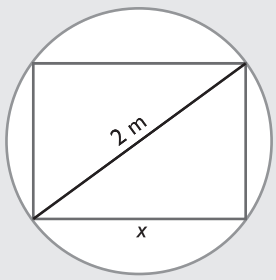
$I(x) = x \cdot p(x) = x\left(4 - \dfrac{x}{2}\right)$

$I(x) = 4x - \dfrac{x^2}{2}$

$\text{Dom}(I) = [0, 8]$

100 Escribe una función que exprese el área de un rectángulo inscrito en una circunferencia de un metro de radio en función del lado x de la base. ¿Cuál es su dominio de definición?

Solución:



$A(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

$\text{Dom}(A) = [0, 2]$

101 Dado un triángulo equilátero de lado x, define las funciones del perímetro y el área, en función del lado. Calcula sus dominios de definición.

Solución:

$P(x) = 3x$

$\text{Dom}(P) = [0, +\infty)$

$A(x) = x\,\dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$

$\text{Dom}(A) = [0, +\infty)$

102 Halla la función que da la longitud del lado de un cuadrado en función del área y calcula su dominio.

Solución:

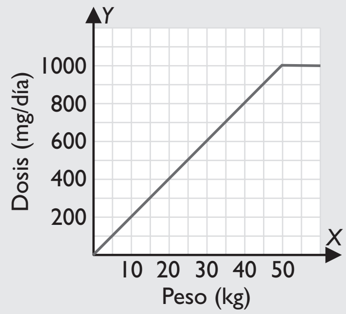
$L(x) = \sqrt{x}$

$\text{Dom}(L) = [0, +\infty)$

103 La dosis habitual recomendada de un determinado antibiótico para niños es de 20 mg por kilogramo de peso al día, sin sobrepasar los 1 000 mg al día. Escribe la función que da la cantidad de antibiótico que se debe suministrar en función del peso. Representa la gráfica.

Solución:

$$D(x) = \begin{cases} 20x & \text{si } 0 \le x \le 50 \\ 1\,000 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$



104 Un emprendedor ha montado un servicio de venta por Internet y servicio a domicilio de cestas de 5 kg de frutas ecológicas teniendo en cuenta que la función de oferta y demanda estudiadas son, respectivamente:

$$O(x) = 250 + 25x;\ D(x) = 2\,750 - 75x$$

a) Encuentra la cantidad de equilibrio.

b) ¿A qué precio se producirá una escasez de 1 000 cestas?

c) A un precio de 30 €, ¿qué ocurrirá en el mercado?

Solución:

a) $O(x) = D(x) \Rightarrow 250 + 25x = 2\,750 - 75x \Rightarrow x = 25$

Para un precio de 25 € la oferta es $O(25) = 875$

La cantidad de equilibrio será de 875 cestas a 25 €

b) $O(x) = D(x) - 1\,000$

$250 + 25x = 2\,750 - 75x - 1\,000 \Rightarrow x = 15$

Se producirá esa escasez cuando el precio sea de 15 €

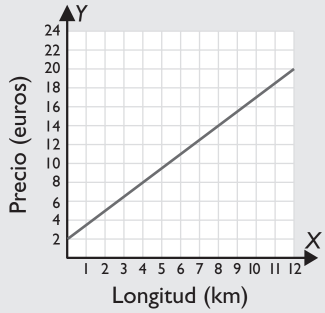
c) Si $x = 30$ € se tiene $O(30) = 1\,000$ y $D(30) = 500$

Hay exceso de oferta.

105 Un taxi cobra 2 € por bajada de bandera y 1,5 € por cada kilómetro recorrido. Escribe la fórmula de la función que da el precio de una carrera, en función de la distancia recorrida, y representa su gráfica.

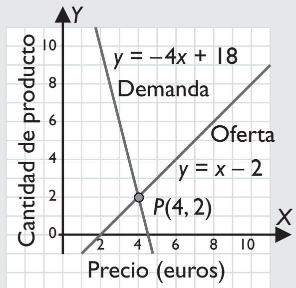
Solución:

$D(x) = 2 + 1,5x$



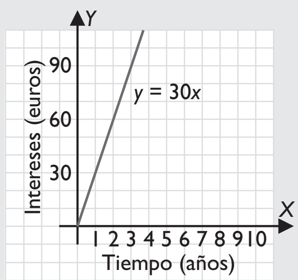
106 Una empresa ha realizado un estudio para determinar las funciones de oferta y de demanda de un producto en función del precio de venta, x. La función de oferta es $y = x - 2$, y la de demanda es $y = -4x + 18$. Representa dichas funciones y halla el punto de equilibrio.

Solución:



107 Se depositan 1 000 € a un 3 % de interés simple durante un año. Escribe la fórmula que da los intereses en función del tiempo.

Solución:

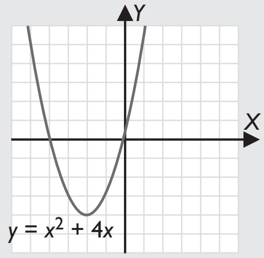


108 Halla el área de un cuadrado en función del lado. Represéntala gráficamente.

Solución:

109 Expresa la fórmula que da el producto de dos números que se diferencian en 4 unidades. Representa su gráfica.

Solución:



110 Con 12 metros de moldura se desea decorar una puerta formando un rectángulo.

a) Escribe la fórmula que expresa el área de dicho rectángulo en función del lado x

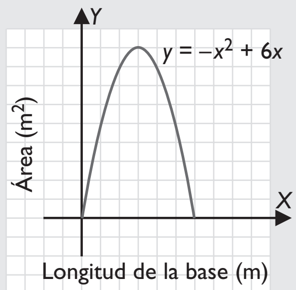
b) Representa la función.

c) Determina las dimensiones del rectángulo que hacen el área máxima.

Solución:

a) $A(x) = x(6 - x) \Rightarrow A(x) = 6x - x^2$

b)



c) Un cuadrado de 3 m de lado con un área de 9 m^2

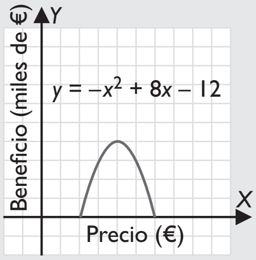
111 El beneficio, en miles de euros, que se obtiene al vender a x € una unidad de un determinado producto viene dado por la fórmula $B(x) = -x^2 + 8x - 12$

a) Representa la función $B(x)$

b) Determina el precio al que hay que vender el producto para obtener el máximo beneficio.

Solución:

a)



b) 4 €

112 Una máquina envasa un pedido de botes de mermelada en 8 horas. Se ponen varias máquinas idénticas a trabajar.

a) Halla la función que expresa el tiempo de envasado en función del número de máquinas.

b) Identifica la función obtenida.

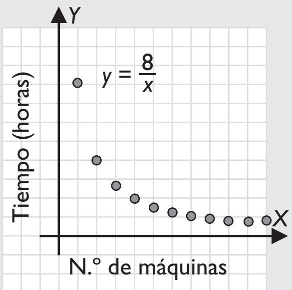
c) Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $y = \dfrac{8}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



113 Para recoger los higos de una finca, una persona dedica 60 horas.

a) Halla la función que expresa el número de personas en función del número de horas.

b) Identifica la función obtenida.

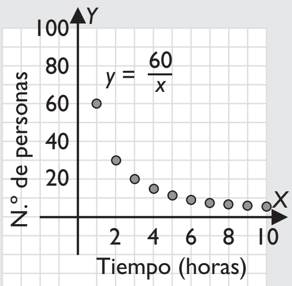
c) Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $y = \dfrac{60}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



114 Un cultivo de bacterias se reproduce de forma que el número de bacterias se duplica cada minuto. Expresa la función que representa el número de bacterias en función del tiempo.

Solución:

Suponiendo que inicialmente haya una bacteria y siendo x el tiempo en minutos: $y = 2^x$

115 Se deposita un capital de 6 000 € al 10% anual, de manera que los intereses se acumulan al capital. Expresa la función que da el capital acumulado en función del tiempo.

Solución:

$C = 6\,000 \cdot 1{,}1^t$

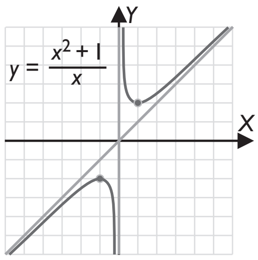
Elabora problemas de más nivel

116 Dadas las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = x^2$ calcula $f \circ g \circ f$

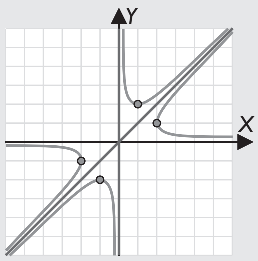
Solución:

$(f \circ g \circ f)(x) = (f \circ g)(\cos x) = f(\cos^2 x) = \cos(\cos^2 x)$

117 Dada la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$, dibuja la inversa.



Solución:



No es función.

118 ¿Puede tener una función polinómica de cuarto grado solo un mínimo? Pon un ejemplo.

Solución:

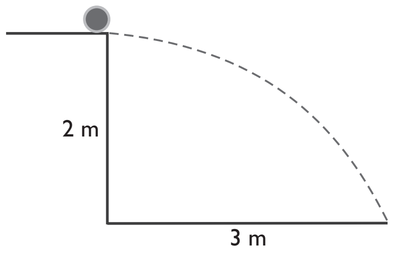
Sí, la función potencial: $y = x^4$

119 ¿Puede existir una función polinómica de tercer grado que no tenga ni máximo ni mínimo? Pon un ejemplo.

Solución:

Sí, la función potencial: $y = x^3$

120 Una pelota rueda desde una altura de 2 m y cae al suelo a 3 m de distancia. Calcula la fórmula de la curva que sigue al caer.



Solución:

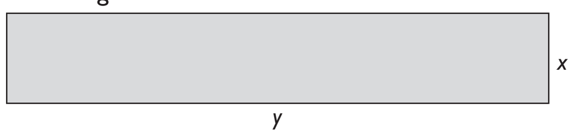
$y = ax^2 + 2$

Pasa por el punto $P(3, 0)$

$9a + 2 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{2}{9}$

$y = -\dfrac{2x^2}{9} + 2$

121 Un rectángulo tiene 6 m^2 de área.



a) Halla la función que expresa uno de los lados en función del otro.

b) Identifica la función obtenida.

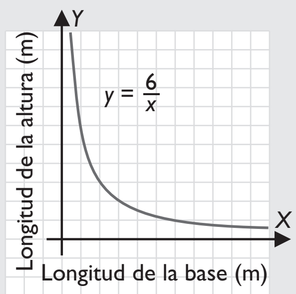
c) Representa gráficamente dicha función.

Solución:

a) $x \cdot y = 6 \Rightarrow y = \dfrac{6}{x}$

b) Función de proporcionalidad inversa.

c)



122 En un cuadrado de un metro de lado se unen los puntos medios, formando otro cuadrado. En este se vuelven a unir sus puntos medios para formar un tercer cuadrado, y así se repite el proceso indefinidamente.

a) Expresa la fórmula que da el perímetro de los sucesivos cuadrados.

b) Expresa la fórmula que da el área de los sucesivos cuadrados.

Solución:

a) Los lados de los cuadrados forman una progresión geométrica de razón $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego los perímetros serán:

$$P(n) = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

b) Las áreas serán:

$$A(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

123 Las funciones de oferta y de demanda de un determinado producto, son respectivamente:

$$O(x) = \frac{x^2}{4} - 200 \text{ y } D(x) = 1\,000 - \frac{x^2}{2}$$

donde x es el precio del producto en euros y $O(x)$ y $D(x)$ el número de unidades por 10 000. Encuentra la cantidad de equilibrio.

Solución:

$O(x) = D(x)$

$\dfrac{x^2}{4} - 200 = 1\,000 - \dfrac{x^2}{2}$

$x^2 - 800 = 4\,000 - 2x^2$

$3x^2 = 4\,800$

$x^2 = 1\,600$

$x = 40$ €

$x = -40$ no tiene sentido