Saberes básicos

Unidad 7.
Trigonometría

1. Razones trigonométricas o circulares

Explora

En una circunferencia de radio $R = 1$ m, calcula mentalmente y de forma exacta la longitud de:

a) La circunferencia. b) La semicircunferencia. c) Un cuarto de circunferencia. d) Tres cuartos de circunferencia.

Solución:

a) $L_{\text{Circunferencia}} = 2\pi$ m b) $L_{\text{Semicircunferencia}} = \pi$ m c) $L_{\text{Cuarto de circunferencia}} = \dfrac{\pi}{2}$ m d) $L_{\text{Tres cuartos de circunferencia}} = \dfrac{3\pi}{2}$ m

Elabora

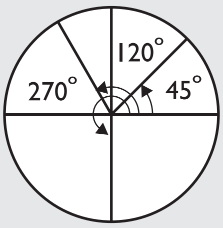
1 Dibuja los siguientes ángulos y pasa mentalmente los que están en grados a radianes y viceversa:

a) 45°, 120°, 270°

b) $\dfrac{\pi}{6}$ rad, $\dfrac{\pi}{2}$ rad, $\dfrac{3\pi}{4}$ rad, π rad

Solución:

a)

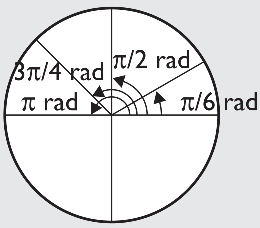


$45° = \dfrac{\pi}{4}$ rad

$120° = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

$270° = \dfrac{3\pi}{2}$ rad

b)



$\dfrac{\pi}{6}$ rad = 30°

$\dfrac{\pi}{2}$ rad = 90°

$\dfrac{3\pi}{4}$ rad = 135°

π rad = 180°

2 Pasa los ángulos que están en grados a radianes y viceversa:

a) 54° b) 217°

c) 1,25 rad d) 2,47 rad

Solución:

a) 0,9425 rad b) 3,7874 rad

c) 71° 37′ 11″ d) 141° 31′ 14″

3 Reduce a un ángulo menor de 360° los siguientes ángulos y escríbelos en forma general:

a) 765° b) 2 345° c) –540°

Solución:

a) $45° + 360° k, k \in \mathbb{Z}$

b) $185° + 360° k, k \in \mathbb{Z}$

c) $180° + 360°$ k, k $\in \mathbb{Z}$

4 Calcula las siguientes razones trigonométricas y redondea el resultado a cuatro decimales:

a) sen 47° 35′ 44″ b) cos 73° 15′ 52″

c) tg 25° 5′ 12″ d) sen 83° 44′ 23″

Solución:

a) 0,7384 b) 0,2880 c) 0,4682 d) 0,9940

5 Calcula los siguientes ángulos en grados, minutos y segundos sabiendo que:

a) sen α = 0,7634 b) cos α = 0,1234

c) tg α = 2,5 d) sen α = 0,8888

Solución:

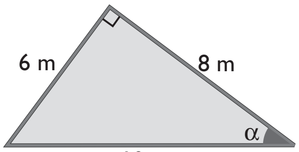
a) α = 49° 45′ 53″

b) α = 82° 54′ 42″

c) α = 68° 11′ 55″

d) α = 62° 43′ 22″

6 Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α del triángulo rectángulo siguiente:



Solución:

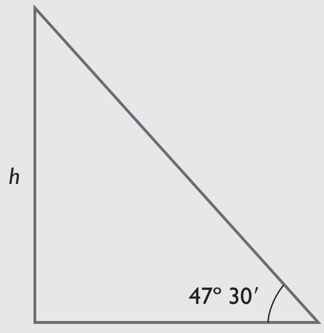
$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5}$ $\quad$ $\text{cosec } \alpha = \frac{5}{3}$

$\cos \alpha = \frac{4}{5}$ $\quad$ $\sec \alpha = \frac{5}{4}$

$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$ $\quad$ $\text{cotg } \alpha = \frac{4}{3}$

7 Un árbol y su sombra forman un ángulo recto. La sombra mide 7,8 m y el ángulo con el que se ve la parte superior del árbol desde el extremo de la sombra mide 47° 30′. Calcula la altura del árbol.

Solución:



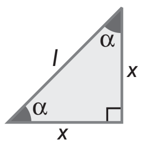
$\text{tg } 47° \, 30' = \frac{h}{7,8}$

$h = 7,8 \text{ tg } 47° \, 30' = 8,5 \text{ m}$

2. Relaciones entre razones. Razones de 30°, 45° y 60°

Explora

En el triángulo rectángulo e isósceles del dibujo, calcula mentalmente:



a) El ángulo α

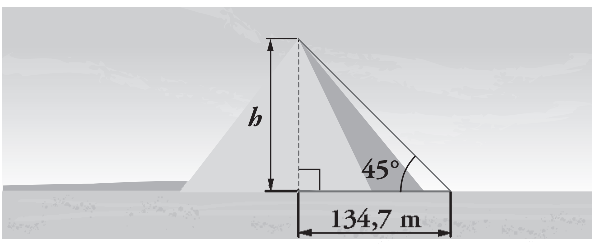
b) $\text{tg } \alpha$

Solución:

a) $\alpha = 45°$ $\quad$ b) $\text{tg } \alpha = 1$

Elabora

8 La pirámide de Kefrén, de Egipto, proyecta una sombra de 134,7 m y el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la parte más alta de la pirámide es de 45°. Halla mentalmente la altura de dicha pirámide.



Solución:

Altura = 134,7 m

9 Si $\text{sen } \alpha = 0,3456$, calcula mentalmente $\cos (90° - \alpha)$

Solución:

0,3456

10 Si $\cos 50° = 0,6428$, calcula mentalmente sen 40°

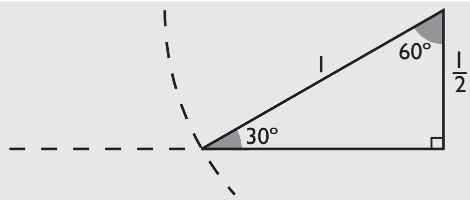
Solución:

0,6428

11 Sabiendo que $\cos \alpha = 1/2$, haz el dibujo del ángulo α y calcula mentalmente el valor de α

Solución:

$\alpha = 60°$



12 Sabiendo que sen α = 2/3, calcula cos α y tg α

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\frac{4}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha : \cos\alpha = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

13 Sabiendo que cos α = 3/5, calcula sen α y tg α

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha : \cos\alpha = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$$

14 Sabiendo que tg α = 1/2, calcula sen α y cos α

Solución:

$$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

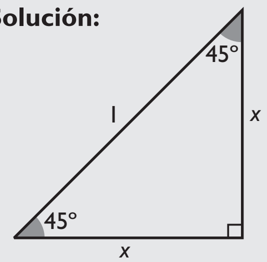
$$\frac{1}{4} + 1 = \sec^2\alpha \Rightarrow \sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\alpha\ \text{tg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

15 Demuestra que tg 45° = 1

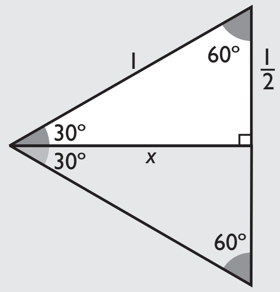
Solución:



$$\text{tg}\,45° = \frac{x}{x} = 1$$

16 Demuestra que sen 60° = cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:



x = sen 60° = cos 30°

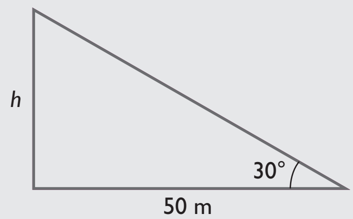
$$x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Despejando x se obtiene que:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{sen}\,60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

17 Un faro proyecta una sombra de 50 m, y el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la parte más alta del faro es de 30°. Halla la altura del faro.

Solución:



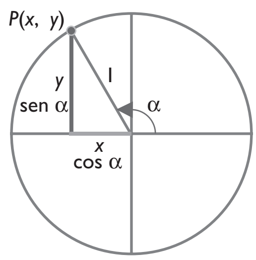
$$\text{tg}\,30° = \frac{h}{50}$$

$$h = 50\ \text{tg}\,30° = 50\,\frac{\sqrt{3}}{3} = 28{,}87\ \text{m}$$

3. Generalización de las razones trigonométricas

Explora

Copia y completa la tabla con el signo de las abscisas y ordenadas en los cuatro cuadrantes:



	1.^{er}	2.^{o}	3.^{er}	4.^{o}
x	+			
y		+		

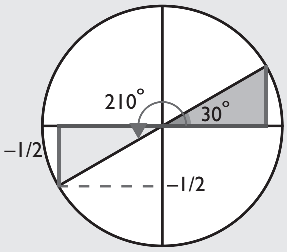
Solución:

	1.^{er}	2.^{o}	3.^{er}	4.^{o}
x	+	–	–	+
y	+	+	–	–

Elabora

18 Un ángulo α está en el 3.er cuadrante y se sabe que sen $\alpha = -1/2$. Dibuja el ángulo y calcula mentalmente el ángulo α, cos α y tg α

Solución:



$\alpha = 210°$

$\cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 210° = \text{tg } 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

19 Copia y sustituye cada recuadro por $\geq$ o $\leq$:

a) $|\text{sen } \alpha|$ ■ 1

b) $|\sec \alpha|$ ■ 1

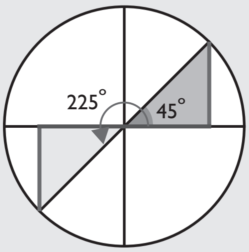
Solución:

a) $|\text{sen } \alpha| \leq 1$

b) $|\sec \alpha| \geq 1$

20 Haz el dibujo y calcula mentalmente el seno, el coseno y la tangente de 225°

Solución:



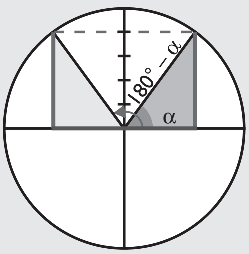
$\text{sen } 225° = -\text{sen } 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 225° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } 225° = \text{tg } 45° = 1$

21 Un ángulo α está en el 2.º cuadrante, y sen $\alpha = 4/5$. Haz el dibujo del ángulo α, halla cos α y tg α

Solución:

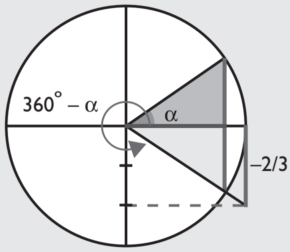


$\cos \alpha = -\dfrac{3}{5}$

$\text{tg } \alpha = -\dfrac{4}{3}$

22 Un ángulo α está en el 4.º cuadrante, y tg $\alpha = -2/3$. Haz el dibujo del ángulo α, halla sen α y cos α

Solución:



$\text{sen } \alpha = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

$\cos \alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

23 Calcula las siguientes razones trigonométricas redondeando el resultado a cuatro cifras decimales:

a) sen 55° 33′ 44″

b) cos 163° 25′ 35″

c) tg 255° 42′ 13″

d) sen 344° 33′ 25″

Solución:

a) 0,8247

b) –0,9585

c) 3,9242

d) –0,2663

24 Calcula el ángulo α en grados, minutos y segundos en los siguientes casos:

a) sen $\alpha = 0{,}5623$ y α está en el 1.er cuadrante.

b) cos $\alpha = -0{,}35$ y α está en el 2.º cuadrante.

c) tg $\alpha = 2{,}1$ y α está en el 3.er cuadrante.

d) sen $\alpha = -0{,}25$ y α está en el 4.º cuadrante.

Solución:

a) $\alpha = 34°\ 12'\ 54''$

b) $\alpha = 110°\ 29'\ 14''$

c) $\alpha = 244°\ 32'\ 12''$

d) $\alpha = 345°\ 31'\ 21''$

4. Fórmulas trigonométricas

Explora

Calcula mentalmente:

a) sen 60° + sen 30°   b) sen (60° + 30°)   c) 2 · cos 45°   d) cos (2 · 45°)

Solución:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ b) sen 90° = 1   c) $2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ d) cos 90° = 0

Elabora

25 Calcula sen 75°

Solución:

sen 75° = sen (45° + 30°) =

$= \text{sen } 45° \cos 30° + \cos 45° \text{ sen } 30° = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + 1\right)}{4}$

26 Calcula tg 15°

Solución:

$\text{tg } 15° = \text{tg } (45° - 30°) = \frac{\text{tg } 45° - \text{tg } 30°}{1 + \text{tg } 45° \text{ tg } 30°} = 2 - \sqrt{3}$

27 Si sen α = 0,3, calcula cos 2α

Solución:

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$

En primer lugar hay que calcular cos α

cos α = 0,9539

$\cos 2\alpha = 0{,}9539^2 - 0{,}3^2 = 0{,}8199$

28 Si cos α = 0,6, calcula tg α/2

Solución:

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}6}{1 + 0{,}6}}$

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm 0{,}5$

29 Calcula cos 75° – cos 15°

Solución:

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \text{ sen } \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ sen } \frac{\alpha - \beta}{2}$

cos 75° – cos 15° = –2 sen 45° sen 30° =

$= -\cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

30 Si sen α = 1/3, calcula sen (α + 30°)

Solución:

sen (α + 30°) = sen α cos 30° + cos α sen 30°

En primer lugar hay que calcular cos α

$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\text{sen } (\alpha + 30°) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}$

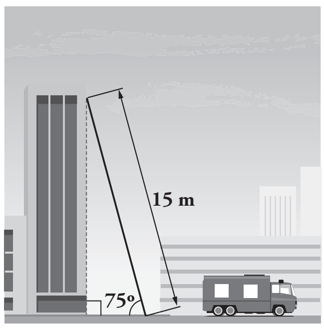
31 Si tg α = 2/3, calcula tg (60° – α)

Solución:

$\text{tg } (60° - \alpha) = \frac{\text{tg } 60° - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } 60° \text{ tg } \alpha} =$

$= \frac{\sqrt{3} - 2/3}{1 + \sqrt{3} \cdot 2/3} = \frac{24 - 13\sqrt{3}}{3}$

32 Una escalera de bomberos está apoyada sobre la fachada de una casa; la escalera mide 15 m de longitud y el ángulo que forma con el suelo es de 75°. Calcula la altura a la que llegará la escalera en la casa.



Solución:

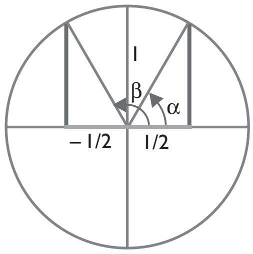
$\text{sen } 75° = \frac{h}{15}$

$h = 15 \cdot \text{sen } 75° = 14{,}49$ m

5. Ecuaciones e identidades trigonométricas

Explora

Observando el dibujo y sabiendo que cos $\alpha = 1/2$, cos $\beta = -1/2$, calcula mentalmente cuánto miden los ángulos α y β



Solución:

$\alpha = 60°$

$\beta = 120°$

Elabora

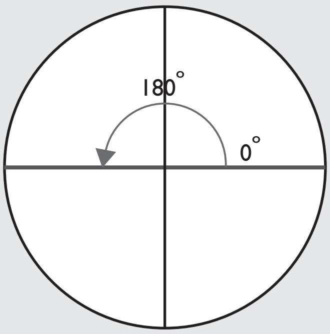
33 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) sen $x = 0$

b) cos $x = -1$

Solución:

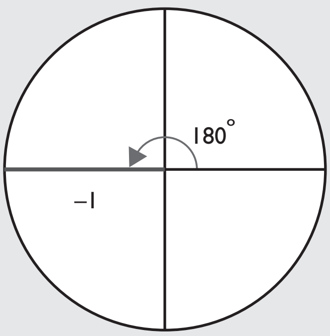
a)



$x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b)



$x = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

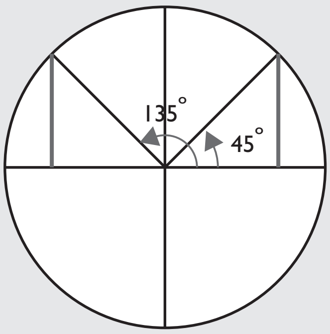
34 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) sen $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) cos $x = -\dfrac{1}{2}$

Solución:

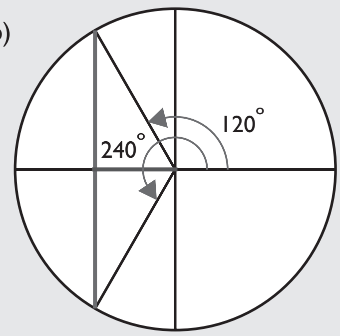
a)



$x_1 = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 135° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b)



$x_1 = 120° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 240° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

35 Resuelve la siguiente ecuación:

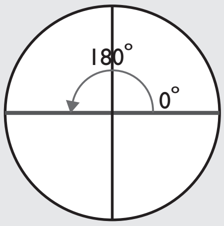
$$\text{sen}^2\, x = \text{sen}\, x$$

Solución:

$\text{sen}^2\, x - \text{sen}\, x = 0 \Rightarrow \text{sen}\, x(\text{sen}\, x - 1) = 0$

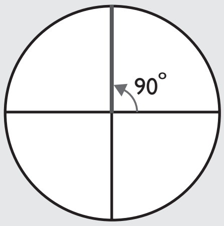
$\text{sen}\, x = 0$, $\text{sen}\, x = 1$

Si $\text{sen}\, x = 0$



$x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z},\ x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $\text{sen}\, x = 1$



$x_3 = 90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

36 Resuelve la siguiente ecuación:

$$2\cos^2 x - \text{sen}\, x = 1$$

Solución:

$2\cos^2 x - \text{sen}\, x = 1$

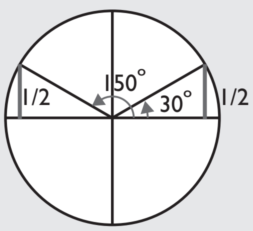
$2(1 - \text{sen}^2\, x) - \text{sen}\, x = 1$

$2 - 2\,\text{sen}^2\, x - \text{sen}\, x = 1$

$2\,\text{sen}^2\, x + \text{sen}\, x - 1 = 0$

$\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$, $\text{sen}\, x = -1$

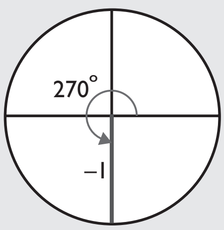
Si $\text{sen}\, x = \frac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $\text{sen}\, x = -1$



$x_3 = 270° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

37 Resuelve la siguiente ecuación:

$$1 + \sec^2 x = 3\,\text{tg}^2\, x$$

Solución:

$1 + \sec^2 x = 3\,\text{tg}^2\, x$

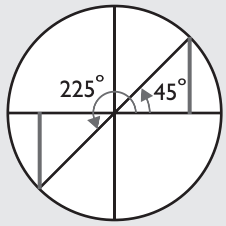
Se aplica que: $\text{tg}^2\, x + 1 = \sec^2 x$

$1 + \text{tg}^2\, x + 1 = 3\,\text{tg}^2\, x$

$\text{tg}^2\, x = 1$

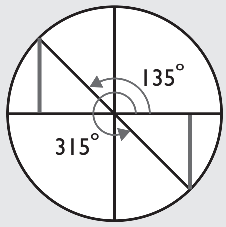
$\text{tg}\, x = \pm 1$

Si $\text{tg}\, x = 1$



$x_1 = 45° + 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $\text{tg}\, x = -1$



$x_3 = 135° + 180°k,\ k \in \mathbb{Z}$

38 Resuelve la siguiente ecuación:

$$\text{cosec}^2\, x = 2\,\text{cotg}^2\, x$$

Solución:

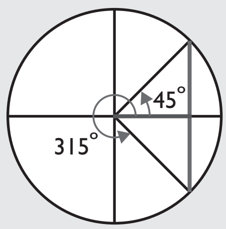
$\text{cosec}^2\, x = 2\,\text{cotg}^2\, x$

$$\frac{1}{\text{sen}^2\, x} = \frac{2\cos^2 x}{\text{sen}^2\, x}$$

$2\cos^2 x = 1$

$\cos x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

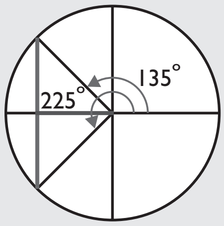
Si $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x_1 = 45° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 315° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$x_3 = 135° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 225° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

39 Comprueba la siguiente identidad:

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{sen}^2 x$$

Solución:

Se hacen operaciones en cada uno de los dos miembros.

En el 1.^{er} miembro:

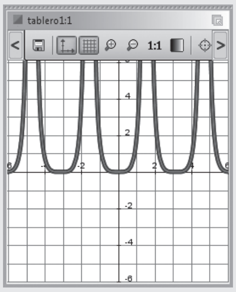
$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{sen}^2 x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}$$

En el 2.° miembro:

$$\operatorname{tg}^2 x \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^4 x}{\cos^2 x}$$

La representación gráfica es:



40 Comprueba la siguiente identidad:

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \sec^2 x \operatorname{cosec}^2 x$$

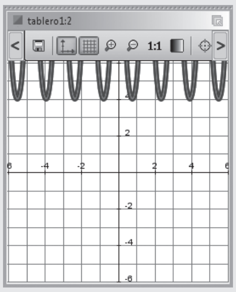
Solución:

Haciendo operaciones en el 1.^{er} miembro se obtiene el 2.° miembro:

$$\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{cosec}^2 x \sec^2 x$$

La representación gráfica es:



41 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

a) $\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y &= 1 \\ \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y &= 0 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y &= \frac{5}{4} \\ \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y &= \frac{3}{4} \end{aligned}\right\}$

Solución:

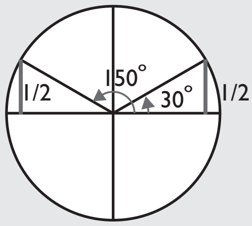
a) Sumando ambas ecuaciones, se obtiene:

$2 \operatorname{sen} x = 1$

Si $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$



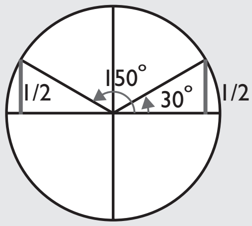
Restando de la 1.ª ecuación la 2.ª, se obtiene:

$2 \operatorname{sen} y = 1$

Si $\operatorname{sen} y = \dfrac{1}{2}$

$y_1 = 30° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$y_2 = 150° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

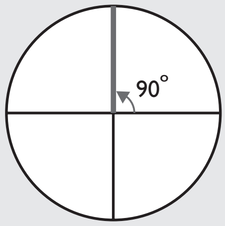


b) Sumando las dos ecuaciones, se obtiene:

$2 \operatorname{sen}^2 x = 2$

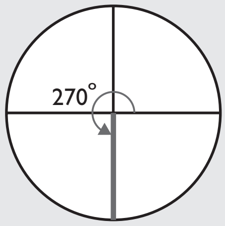
$\operatorname{sen}^2 x = 1$

$\operatorname{sen} x = \sqrt{1} = \pm 1$



Si $\operatorname{sen} x = 1$

$x_1 = 90° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$



Si $\operatorname{sen} x = -1$

$x_2 = 270° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Restando las dos ecuaciones, se obtiene:

$2 \cos^2 y = \dfrac{1}{2}$

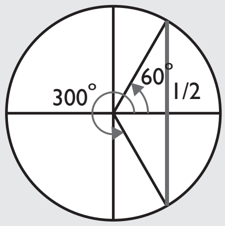
$\cos^2 y = \dfrac{1}{4}$

$\cos y = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \pm \dfrac{1}{2}$

Si $\cos y = \dfrac{1}{2}$

$y_1 = 60° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

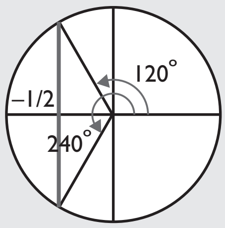
$y_2 = 300° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$



Si $\cos y = -\dfrac{1}{2}$

$y_3 = 120° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$y_4 = 240° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$



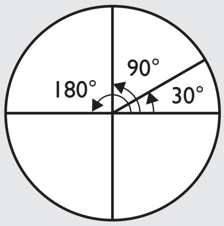
Actividades finales

Elabora actividades de las secciones

1. Razones trigonométricas o circulares

42 Dibuja los siguientes ángulos y pasa mentalmente de grados a radianes: 30°, 90° y 180°

Solución:

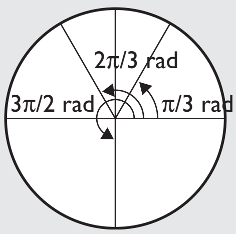


$$30° = \frac{\pi}{6}\text{ rad}$$
$$90° = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$
$$180° = \pi\text{ rad}$$

43 Dibuja los siguientes ángulos y pasa mentalmente de radianes a grados:

$$\frac{\pi}{3}\text{ rad} \qquad \frac{2\pi}{3}\text{ rad} \qquad \frac{3\pi}{2}\text{ rad}$$

Solución:



$$\frac{\pi}{3}\text{ rad} = 60°$$
$$\frac{2\pi}{3}\text{ rad} = 120°$$
$$\frac{3\pi}{2}\text{ rad} = 270°$$

44 Pasa de grados a radianes los siguientes ángulos:

a) 47° b) 319°

Solución:

a) 0,8203 rad b) 5,5676 rad

45 Pasa de radianes a grados los siguientes ángulos:

a) 0,85 rad b) 1,23 rad

Solución:

a) 48° 42′ 5″ b) 70° 28′ 26″

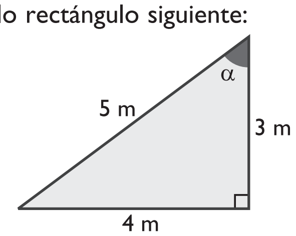
46 Reduce a un ángulo menor de 360° los siguientes ángulos y escríbelos en forma general:

a) 900° b) 25 647° c) –1 755°

Solución:

a) $180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$
b) $87° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$
c) $45° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

47 Calcula todas las razones trigonométricas del ángulo α del triángulo rectángulo siguiente:



Solución:

$\text{sen}\ \alpha = \frac{4}{5}$ $\text{cosec}\ \alpha = \frac{5}{4}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\sec\alpha = \frac{5}{3}$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{3}$ $\text{cotg}\ \alpha = \frac{3}{4}$

48 Calcula las siguientes razones trigonométricas y redondea el resultado a cuatro decimales:

a) sen 55° 33′ 22″ b) cos 87° 5′ 2″
c) tg 45° 15′ 25″ d) sen 18° 11′ 20″

Solución:

a) 0,8247 b) 0,0509
c) 1,0090 d) 0,3122

49 Calcula los ángulos en grados, minutos y segundos sabiendo que:

a) sen α = 0,4444 b) cos α = 0,6703
c) tg α = 0,5 d) sen α = 0,9876

Solución:

a) α = 26° 23′ 6″ b) α = 47° 54′ 35″
c) α = 26° 33′ 54″ d) α = 80° 58′ 4″

2. Relaciones entre razones. Razones de 30°, 45° y 60°

50 Un sabio llamado Thales de Mileto se acerca a la gran esfinge de Egipto con un bastón de 1 m de altura, se sienta en una piedra y pone el bastón vertical al suelo. Espera hasta que la sombra es igual de larga que el bastón. En ese momento mide la longitud de la sombra de la esfinge y obtiene 20 m. Calcula mentalmente cuánto mide de alto dicha esfinge.

Solución:

Altura = 20 m

51 Sabiendo que cos α = 0,7777, calcula mentalmente el valor de sen (90° – α)

Solución:

0,7777

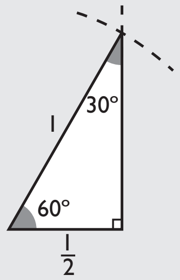
52 Sabiendo que sen 50° = 0,7660, calcula mentalmente el valor de cos 40°

Solución:

0,7660

53 Sabiendo que sen $\alpha = 1/2$, haz el dibujo del ángulo α y calcula mentalmente el valor de α

Solución:



$\alpha = 30°$

54 Sabiendo que sen $\alpha = 4/5$, calcula cos α y tg α

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\dfrac{16}{25} + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

$\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha : \cos\alpha = \dfrac{4}{5} : \dfrac{3}{5} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{4}{3}$

55 Sabiendo que cos $\alpha = 2/5$, calcula sen α y tg α

Solución:

Se aplica la fórmula fundamental:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}^2\,\alpha + \dfrac{4}{25} = 1 \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

$\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha : \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{5} : \dfrac{2}{5} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

56 Sabiendo que tg $\alpha = 5/12$, calcula sen α y cos α

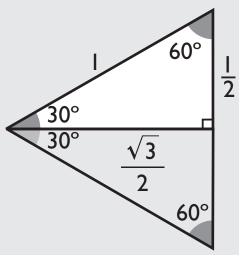
Solución:

$\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{5}{13}$

57 Demuestra que:

a) $\text{tg}\,60° = \text{cotg}\,30° = \sqrt{3}$ b) $\text{tg}\,30° = \text{cotg}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Solución:



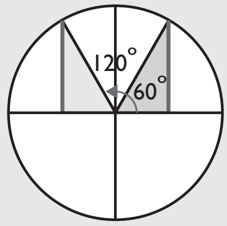
$\text{tg}\,60° = \text{sen}\,60° : \cos 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{2} = \sqrt{3}$

$\text{tg}\,30° = \text{sen}\,30° : \cos 30° = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. Generalización de las razones trigonométricas

58 Un ángulo α está en el segundo cuadrante y es tal que $\cos\alpha = -1/2$. Dibuja el ángulo y calcula mentalmente el ángulo α, el sen α y la tg α

Solución:



$\alpha = 120°$

$\text{sen}\,120° = \text{sen}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\,120° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

59 Copia y sustituye los recuadros por el signo correspondiente:

a) $|\cos\alpha|$ ■ 1 b) $|\text{cosec}\,\alpha|$ ■ 1

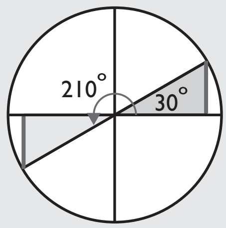
Solución:

a) $|\cos\alpha| \le 1$

b) $|\text{cosec}\,\alpha| \ge 1$

60 Haz el dibujo y calcula mentalmente seno, coseno y tangente de 210°

Solución:



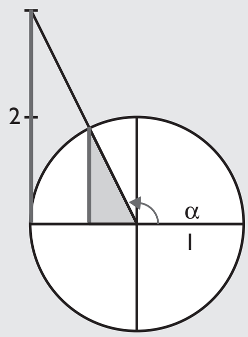
$\text{sen}\,210° = -\text{sen}\,30° = -\dfrac{1}{2}$

$\cos 210° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\,210° = \text{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

61 Un ángulo α está en el 2.° cuadrante y es tal que $\text{tg}\,\alpha = -2$. Haz el dibujo del ángulo α; halla sen α y cos α

Solución:



$\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$4 + 1 = \sec^2\alpha$

$\sec\alpha = -\sqrt{5} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

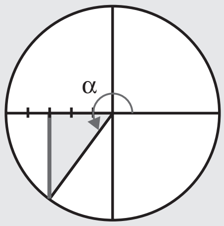
$\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha : \cos\alpha$

$\text{sen}\,\alpha = \text{tg}\,\alpha \cos\alpha$

$\text{sen}\,\alpha = -2\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

62 Un ángulo α está en el 3.er cuadrante, y $\cos \alpha = -3/5$. Haz el dibujo del ángulo α; halla $\text{sen}\ \alpha$ y $\text{tg}\ \alpha$

Solución:



$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$\text{sen}^2 \alpha + \frac{9}{25} = 1 \Rightarrow \text{sen}\ \alpha = -\frac{4}{5}$

$\text{tg}\ \alpha = \text{sen}\ \alpha : \cos \alpha = -\frac{4}{5} : \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{5}}{3} = \frac{4}{3}$

$\text{tg}\ \alpha = \frac{4}{3}$

63 Calcula las siguientes razones trigonométricas y redondea el resultado a cuatro cifras decimales:

a) sen 256° 23′ 5″

b) cos 12° 20′ 30″

c) tg 157° 13′ 10″

d) cos 325° 26′ 27″

Solución:

a) –0,9719 b) 0,9769

c) –0,4200 d) 0,8235

64 Calcula el ángulo α en grados, minutos y segundos en los siguientes casos:

a) $\text{sen}\ \alpha = 0{,}2020$ y α está en el 1.er cuadrante.

b) $\text{tg}\ \alpha = -3{,}1415$ y α está en el 2.° cuadrante.

c) $\cos \alpha = -0{,}6$ y α está en el 3.er cuadrante.

d) $\text{sen}\ \alpha = -0{,}8325$ y α está en el 4.° cuadrante.

Solución:

a) α = 11° 39′ 14″

b) α = 107° 39′ 26″

c) α = 233° 7′ 48″

d) α = 303° 38′ 37″

4. Fórmulas trigonométricas

65 Calcula cos 75°

Solución:

$\cos 75° = \cos (45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cos 30° - \text{sen}\ 45° \text{sen}\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

66 Calcula sen 15°

Solución:

$\text{sen}\ 15° = \text{sen}\ (45° - 30°) =$

$= \text{sen}\ 45° \cos 30° - \cos 45° \text{sen}\ 30° =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

67 Sabiendo que $\cos \alpha = 0{,}6$, calcula $\text{sen}\ 2\alpha$

Solución:

$\text{sen}\ 2\alpha = 2\ \text{sen}\ \alpha \cos \alpha$

En primer lugar hay que calcular $\text{sen}\ \alpha$:

$\text{sen}\ \alpha = 0{,}8$

$\text{sen}\ 2\alpha = 2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}96$

68 Sabiendo que $\cos \alpha = 0{,}4$, calcula $\text{tg}\ \alpha/2$

Solución:

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0{,}4}{1 + 0{,}4}}$

$\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm 0{,}6547$

69 Calcula cos 15° + cos 75°

Solución:

$\cos 15° + \cos 75° = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} =$

$= 2 \cos 45° \cos (-60°) = \cancel{2} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

70 Sabiendo que $\cos \alpha = 0{,}6$, calcula $\text{sen}\ (60° - \alpha)$

Solución:

$\text{sen}\ (60° - \alpha) = \text{sen}\ 60° \cos \alpha - \cos 60° \text{sen}\ \alpha$

En primer lugar hay que calcular $\text{sen}\ \alpha$:

$\text{sen}\ \alpha = 0{,}8$

$\text{sen}\ (60° - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}6 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}8 = 0{,}1196$

71 Sabiendo que $\text{tg}\ \alpha = 5/4$, calcula $\text{tg}\ (\alpha - 45°)$

Solución:

$\text{tg}\ (\alpha - 45°) = \frac{\text{tg}\ \alpha - \text{tg}\ 45°}{1 + \text{tg}\ \alpha\ \text{tg}\ 45°} = \frac{5/4 - 1}{1 + 5/4 \cdot 1} = \frac{1}{9}$

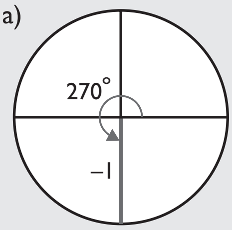
5. Ecuaciones e identidades trigonométricas

72 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) sen $x = -1$ b) cos $x = 0$

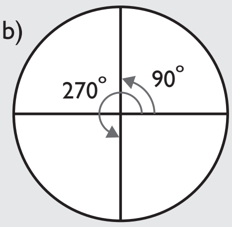
Solución:

a)



$x = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b)



$x_1 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

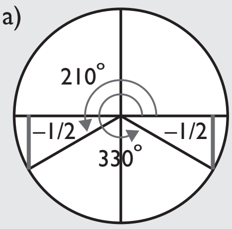
$x_2 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

73 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) sen $x = -\frac{1}{2}$ b) sen $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solución:

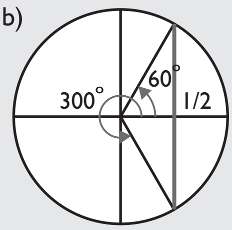
a)



$x_1 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b)



$x_1 = 120° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 240° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

74 Resuelve la siguiente ecuación: 2 cos x = sec x

Solución:

$2\cos x = \sec x$

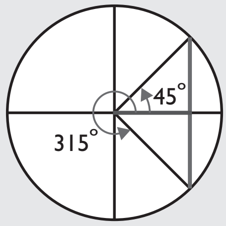
$2\cos x = \frac{1}{\cos x}$

$2\cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

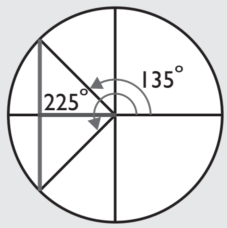
Si $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$x_1 = 45° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 315° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Si $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x_3 = 135° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 225° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

75 Resuelve la siguiente ecuación: $2\,\text{sen}^2 x + \cos x = 1$

Solución:

$2\,\text{sen}^2 x + \cos x = 1$

Se aplica que: $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

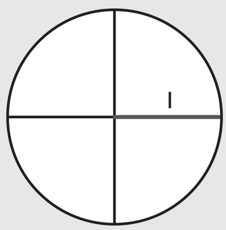
$2(1 - \cos^2 x) + \cos x = 1$

$2 - 2\cos^2 x + \cos x = 1$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

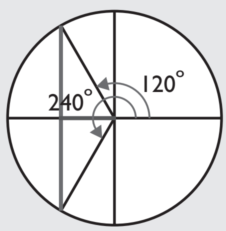
$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1+3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$

Si $\cos x = 1$



$x_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Si $\cos x = -\frac{1}{2}$



$x_2 = 120° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = 240° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

76 Resuelve la siguiente ecuación: $\cos x = \operatorname{sen} 2x$

Solución:

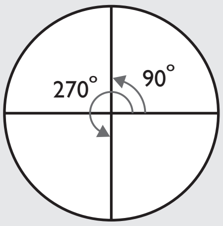
$\cos x = \operatorname{sen} 2x$

$\cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$2 \operatorname{sen} \cos x - \cos x = 0$

$$\cos x(2 \operatorname{sen} x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 2 \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

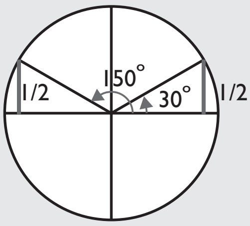
Si $\cos x = 0$



$x_1 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Si $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$



$x_3 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$, $x_4 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

77 Resuelve la siguiente ecuación: $\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$

Solución:

$\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2 \sec^2 x$

Se aplica la fórmula: $\operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$

$\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2(\operatorname{tg}^2 x + 1)$

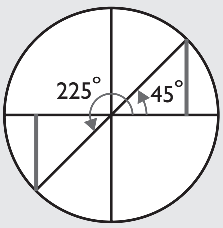
$\operatorname{tg}^2 x + 3 = 2 \operatorname{tg}^2 x + 2$

$\operatorname{tg}^2 x = 1$

$\operatorname{tg} x = \pm 1$

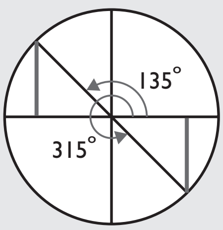
Si $\operatorname{tg} x = 1$

$x_1 = 45° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$



Si $\operatorname{tg} x = -1$

$x_3 = 135° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$



78 Comprueba la siguiente identidad:

$$\cos x + \sec x = \sec x\,(1 + \cos^2 x)$$

Solución:

Se hacen operaciones en cada uno de los dos miembros.

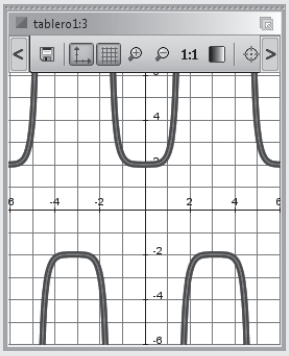
En el 1.^er^ miembro:

$$\cos x + \sec x = \cos x + \frac{1}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + 1}{\cos x}$$

En el 2.° miembro:

$$\sec x(1 + \cos^2 x) = \frac{1 + \cos^2 x}{\cos x}$$

La representación gráfica es:



79 Comprueba la siguiente identidad:

$$\operatorname{tg} x = \cos 2x(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x)$$

Solución:

Haciendo operaciones en el 2.° miembro se obtiene el 1.°.

$$\cos 2x(\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x) = \cos 2x\left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \operatorname{tg} x\right) =$$

$$= \cos 2x\left(\frac{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right) =$$

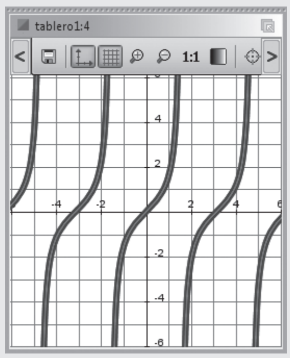
$$= \cos 2x\left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right) = \cos 2x \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} : \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \cos 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot \cancel{\cos 2x} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos 2x}} =$$

$$= \operatorname{tg} x$$

La representación gráfica es:



80 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas:

a) $\left.\begin{array}{r} \text{sen } x + \cos y = \dfrac{3}{2} \\ 3 \text{ sen } x - 2 \cos y = 2 \end{array}\right\}$

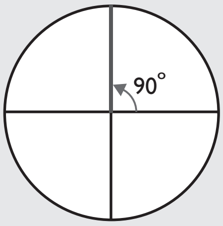
b) $\left.\begin{array}{r} \text{sen } x + \cos y = 1 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se multiplica la 1.ª ecuación por 2 y se suman. Se obtiene:

$5 \text{ sen } x = 5$

$\text{sen } x = 1$

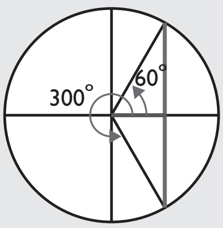


$x = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Se multiplica la 1.ª ecuación por 3 y se le resta la 2.ª. Se obtiene:

$5 \cos y = \dfrac{5}{2}$

$\cos y = \dfrac{1}{2}$



$y_1 = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$y_2 = 300° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) Haciendo: $\text{sen } x = u$, $\cos y = v$, se tiene:

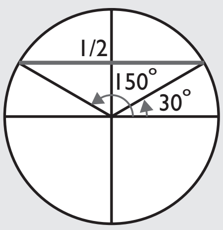
$\left.\begin{array}{r} u + v = 1 \\ u^2 + v^2 = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$u = \dfrac{1}{2}, v = \dfrac{1}{2}$

Luego:

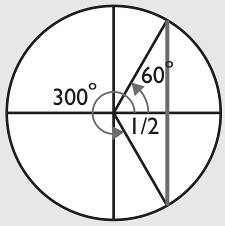
$\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$\cos y = \dfrac{1}{2}$



$y_1 = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$y_2 = 300° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

81 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones trigonométricas y da las soluciones en $[0, \pi/2]$:

a) $\left.\begin{array}{r} \text{sen } x \cdot \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \text{sen } y \cdot \cos x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4y \text{ sen } x \cos x = 3 \\ 2y \cos 2x = \sqrt{3} \end{array}\right\}$

Solución:

a) Sumando las dos ecuaciones, se tiene:

$\text{sen } (x + y) = 1$

Restando las dos ecuaciones, se tiene:

$\text{sen } (x - y) = \dfrac{1}{2}$

De donde se tiene:

$\left.\begin{array}{l} x + y = 90° \\ x - y = 30° \end{array}\right\}$

Resolviendo el sistema:

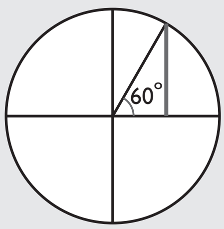
$x = 60°, y = 30°$

b) Como $\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$, se tiene:

$\left.\begin{array}{l} 2y \text{ sen } 2x = 3 \\ 2y \cos 2x = \sqrt{3} \end{array}\right\}$

Dividiendo la 1.ª ecuación entre la 2.ª ecuación:

$\text{tg } 2x = \sqrt{3}$ (solo se toman las soluciones de $[0, \pi/2]$)



$2x = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x = 30° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

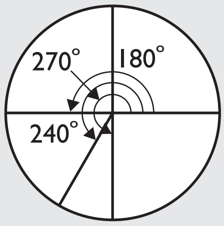
$y = \sqrt{3}$

Elabora actividades para reforzar

82 Dibuja los siguientes ángulos y pasa de grados a radianes de modo exacto:

180° 240° 270°

Solución:



$180° = \pi$ rad

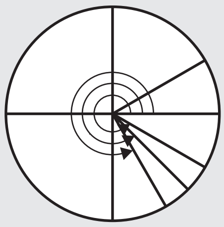
$240° = \frac{4\pi}{3}$ rad

$270° = \frac{3\pi}{2}$ rad

83 Dibuja los siguientes ángulos y pasa de radianes a grados de modo exacto:

$\frac{5\pi}{3}$ rad $\frac{7\pi}{4}$ rad $\frac{11\pi}{6}$ rad

Solución:



$\frac{5\pi}{3}$ rad $= 300°$

$\frac{7\pi}{4}$ rad $= 315°$

$\frac{11\pi}{6}$ rad $= 330°$

84 Reduce los siguientes ángulos a ángulos comprendidos entre 0° y 360°. Escríbelos en forma general:

a) –30° b) –150°

c) –600° d) – 2 500°

Solución:

a) $330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

c) $120° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

d) $20° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

85 Reduce los siguientes ángulos a ángulos comprendidos entre 0 rad y 2π rad. Escríbelos en forma general:

a) $-\frac{13\pi}{2}$ rad

b) $-\frac{83\pi}{3}$ rad

Solución:

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

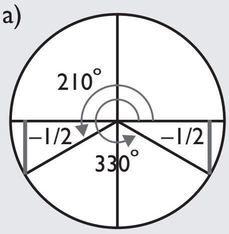
86 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) sen $x = -\frac{1}{2}$

b) tg $x = -1$

Solución:

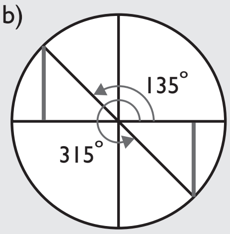
a)



$x_1 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b)



$x_1 = 135° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

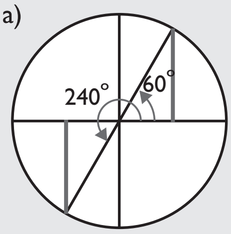
$x_2 = 315° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

87 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) tg $x = \sqrt{3}$ b) cotg $x = 1$

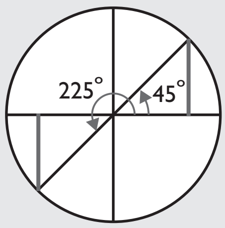
Solución:

a)



$x_1 = 60° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

b) cotg $x = 1 \Rightarrow$ tg $x = 1$



$x_1 = 45° + 180°k, k \in \mathbb{Z}$

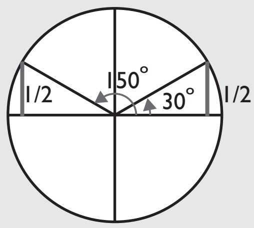
88 Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones tras hacer el dibujo correspondiente:

a) cosec $x = 2$

b) sec $x = -2$

Solución:

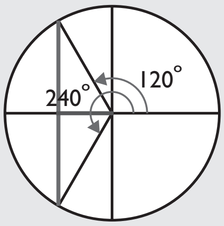
a) cosec $x = 2 \Rightarrow$ sen $x = \frac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\sec x = -2 \Rightarrow \cos x = -\dfrac{1}{2}$



$x_1 = 120° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$
$x_2 = 240° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

89 Calcula en radianes el menor ángulo que forman las agujas de un reloj cuando marcan:

a) Las 3 h en punto.

b) Las 5 h en punto.

c) Las 8 h en punto.

d) Las 11 h en punto.

Solución:

a) $\dfrac{\pi}{2}$ b) $\dfrac{5\pi}{6}$

c) $\dfrac{2\pi}{3}$ d) $\dfrac{\pi}{6}$

90 La longitud de una circunferencia mide 32 cm. Calcula en grados las amplitudes de los siguientes arcos:

a) Arco de longitud 4 m

b) Arco de longitud 8 m

c) Arco de longitud 16 m

d) Arco de longitud 24 m

Solución:

a) 45° b) 90° c) 180° d) 270°

91 Sin utilizar la calculadora, halla:

a) sen 30° + cos 60° – tg 45°

b) tg 45° – sen 60° + cos 30°

Solución:

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - 1 = 0$

b) $1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$

92 Sin utilizar la calculadora, halla:

a) $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{3} + \cos\dfrac{\pi}{6} - \text{tg}\,\dfrac{\pi}{4}$

b) $\cos\dfrac{\pi}{3} - \text{tg}\,\dfrac{\pi}{6} + \text{sen}\,\dfrac{\pi}{6}$

Solución:

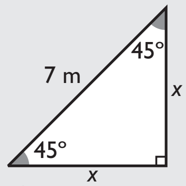
a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1$

b) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

93 Un triángulo rectángulo es isósceles, y la hipotenusa mide 7 m. Calcula cuánto miden los catetos y su área.

Solución:

$\text{sen}\,45° = \dfrac{x}{7} \Rightarrow x = 7\,\text{sen}\,45° = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$



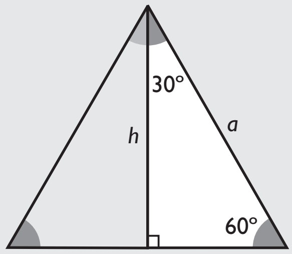
$\text{Área} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{7\sqrt{2}}{2} = \dfrac{49}{4} = 12{,}25\ \text{m}^2$

94 Deduce las fórmulas de las áreas de los siguientes poliedros regulares:

a) Tetraedro. b) Octaedro. c) Icosaedro.

Solución:

Previamente se calcula el área de un triángulo equilátero:



$\text{sen}\,60° = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a\,\text{sen}\,60°$

$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Área de un triángulo equilátero:

$A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

a) Tetraedro

$A_{\text{Tetraedro}} = a^2\sqrt{3}$

b) Octaedro

$A_{\text{Octaedro}} = 2a^2\sqrt{3}$

c) Icosaedro

$A_{\text{Icosaedro}} = 5a^2\sqrt{3}$

95 Copia y completa la siguiente tabla escribiendo el signo:

	1.^er^	2.°	3.^er^	4.°
sen α				
cos α				
tg α				

Solución:

	1.^er^	2.°	3.^er^	4.°
sen α	+	+	–	–
cos α	+	–	–	+
tg α	+	–	+	–

96 Calcula mentalmente el valor de los siguientes ángulos:

a) sen $\alpha = 0$

b) sen $\alpha = 1$

c) cos $\alpha = 0$

d) cos $\alpha = 1$

Solución:

a) $\alpha_1 = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha_2 = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha_1 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha_2 = 270° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

d) $\alpha = 360°k, k \in \mathbb{Z}$

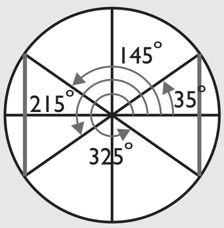
97 Sabiendo que sen 35° = 0,5736, representa el ángulo α de forma aproximada y calcula mentalmente:

a) sen 145°

b) sen 215°

c) sen (– 35°)

Solución:



a) 0,5736

b) –0,5736

c) –0,5736

98 Sin utilizar la calculadora, halla:

a) sen 330° + cos 240° – tg 150°

b) tg 120° – sen 240° + cos 315°

Solución:

a) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} - 1$

b) $-\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

99 Sin utilizar la calculadora, halla:

a) $\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{6} - \text{tg}\,\frac{7\pi}{4}$

b) $\cos\frac{5\pi}{4} - \text{tg}\,\frac{4\pi}{3} + \text{sen}\,\frac{5\pi}{4}$

Solución:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 1$

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$

100 Sabiendo que cos $\alpha = 1/4$, calcula cos $(\alpha + 60°)$

Solución:

$\cos(\alpha + 60°) = \cos\alpha \cos 60° - \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\, 60°$

En primer lugar hay que calcular sen α

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos(\alpha + 60°) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - 3\sqrt{5}}{8}$

101 Sabiendo que tg $\alpha = 3/4$, calcula tg $(30° - \alpha)$

Solución:

$\text{tg}(30° - \alpha) = \frac{\text{tg}\,30° - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,30°\,\text{tg}\,\alpha} =$

$= \frac{\sqrt{3}/3 - 3/4}{1 + \sqrt{3}/3 \cdot 3/4} = \frac{25\sqrt{3} - 48}{39}$

102 Resuelve la siguiente ecuación: $\cos 2x = 2 - 3\,\text{sen}\,x$

Solución:

$\cos 2x = 2 - 3\,\text{sen}\,x$

Se aplica que: $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

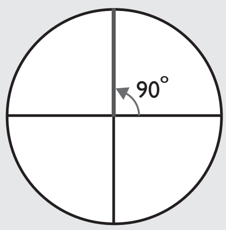
$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = 2 - 3\,\text{sen}\,x$

$1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = 2 - 3\,\text{sen}\,x$

$2\,\text{sen}^2 x - 3\,\text{sen}\,x + 1 = 0$

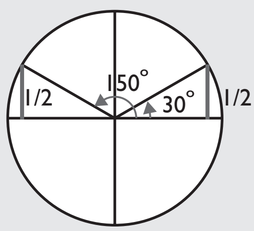
$\text{sen}\,x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

Si sen $x = 1$



$x_1 = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Si sen $x = \frac{1}{2}$



$x_2 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_3 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

103 Resuelve la siguiente ecuación: tg $x = 2$ sen x

Solución:

tg x = 2 sen x

$\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} = 2\,\text{sen}\,x$

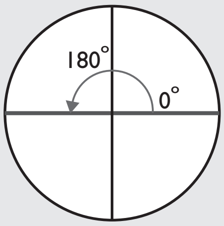
$\text{sen}\,x = 2\,\text{sen}\,x \cos x$

$2 \text{ sen } x \cos x - \text{sen } x = 0$

$\text{sen } x(2 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \text{sen } x = 0 \\ 2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

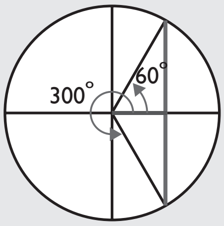
Si sen $x = 0$



$x_1 = 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 180° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Si $\cos x = \dfrac{1}{2}$



$x_3 = 60° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x_4 = 300° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

Con calculadora

104 Copia y completa la siguiente tabla:

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sen										
cos										
tg										

A la vista del resultado de la tabla anterior, copia y completa las siguientes frases con las palabras «crece» o «decrece»:

a) Cuando el ángulo crece de 0° a 90°, el seno

b) Cuando el ángulo crece de 0° a 90°, el coseno

c) Cuando el ángulo crece de 0° a 90°, la tangente

Solución:

	0°	10°	20°	30°	40°
sen	0,0000	0,1736	0,3420	0,5000	0,6428
cos	1,0000	0,9848	0,9397	0,8660	0,7660
tg	0	0,1763	0,3640	0,5774	0,8391

	50°	60°	70°	80°	90°
sen	0,7660	0,8660	0,9397	0,9848	1,0000
cos	0,6428	0,5000	0,3420	0,1736	0,0000
tg	1,1918	1,7321	2,7475	5,6713	ERROR

a) Crece. b) Decrece. c) Crece.

105 Sabiendo que sen $\alpha = 0{,}7523$, halla el ángulo α y calcula cos α y tg α. El ángulo está en el 1.er cuadrante.

Solución:

$\alpha = 48°\ 47'\ 24''$

$\cos \alpha = 0{,}6588$

$\text{tg } \alpha = 1{,}1419$

106 Sabiendo que cos $\alpha = 0{,}2345$, halla el ángulo α y calcula sen α y tg α. El ángulo está en el 1.er cuadrante.

Solución:

$\alpha = 76°\ 26'\ 16''$

$\text{sen } \alpha = 0{,}9721$

$\text{tg } \alpha = 4{,}1455$

107 Calcula los distintos ángulos menores de 360° en grados, minutos y segundos, sabiendo que:

a) sen $\alpha = -0{,}4321$ b) cos $\alpha = 0{,}7654$

c) tg $\alpha = -3{,}4532$ d) cos $\alpha = -0{,}3333$

Solución:

a) $\alpha = 205°\ 36'\ 3''$, $\alpha = 334°\ 23'\ 57''$

b) $\alpha = 40°\ 3'\ 27''$, $\alpha = 319°\ 56'\ 33''$

c) $\alpha = 106°\ 9'\ 1''$, $\alpha = 286°\ 9'\ 1''$

d) $\alpha = 109°\ 28'\ 9''$, $\alpha = 250°\ 31'\ 51''$

108 Calcula las siguientes razones trigonométricas redondeando el resultado a cuatro decimales:

a) sen 2,3 rad

b) cos 0,5 rad

c) tg 4,345 rad

d) sen 5,7 rad

Solución:

Hay que poner la calculadora en modo **Rad.**

a) 0,7457 b) 0,8776

c) 2,5983 d) –0,5507

109 Calcula los ángulos en radianes aproximando el resultado a cuatro decimales, sabiendo que:

a) sen $\alpha = 0{,}4444$ en el 1.er cuadrante.

b) cos $\alpha = -0{,}8011$ en el 2.º cuadrante.

c) tg $\alpha = 2$ en el 3.er cuadrante.

d) sen $\alpha = -0{,}7055$ en el 4.º cuadrante.

Solución:

Hay que poner la calculadora en modo **Rad.**

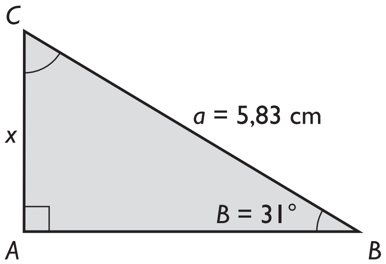
a) 0,4605 b) 2,4999

c) 4,2487 d) 5,5001

Hay que volver a poner la calculadora en modo **Deg.**

Elabora problemas

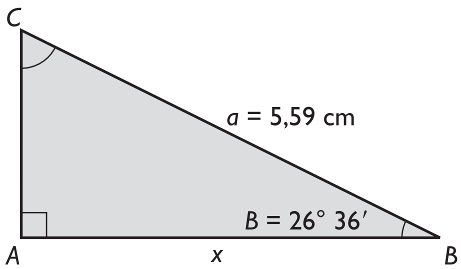
110 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\text{sen } 31° = \dfrac{x}{5,83} \Rightarrow x = 5,83 \text{ sen } 31° = 3 \text{ cm}$

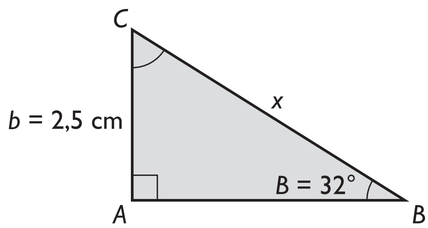
111 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\cos 26° 36' = \dfrac{x}{5,59} \Rightarrow x = 5,59 \cos 26° 36' = 5 \text{ cm}$

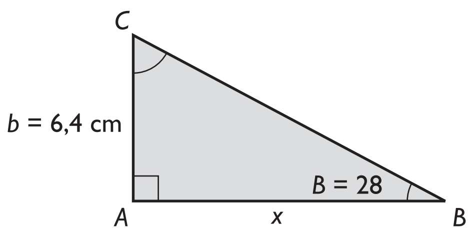
112 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\text{sen } 32° = \dfrac{2,5}{x} \Rightarrow x = \dfrac{2,5}{\text{sen } 32°} = 4,72 \text{ cm}$

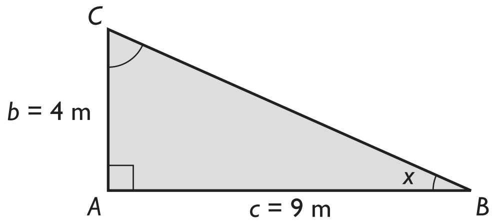
113 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\text{tg } 28° = \dfrac{6,4}{x} \Rightarrow x = \dfrac{6,4}{\text{tg } 28°} = 12,04 \text{ cm}$

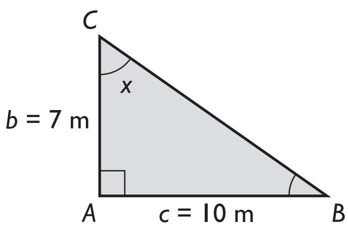
114 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\text{tg } x = \dfrac{4}{9} \Rightarrow x = 23° 57' 45''$

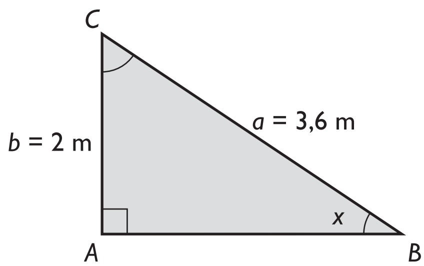
115 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\text{tg } x = \dfrac{10}{7} \Rightarrow x = 55° 29''$

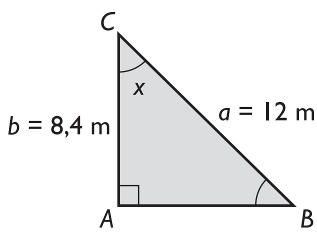
116 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\text{sen } x = \dfrac{2}{3,6} \Rightarrow x = 33° 44' 56''$

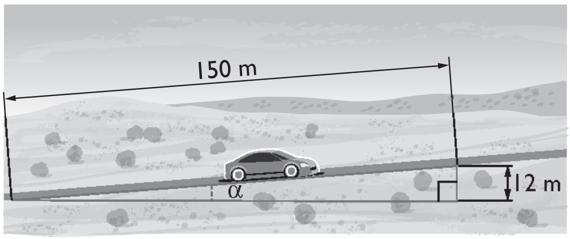
117 Halla el valor de x en el siguiente triángulo rectángulo:



Solución:

$\cos x = \dfrac{8,4}{12} \Rightarrow x = 45° \, 34' \, 23''$

118 Un tramo de una carretera recta mide 150 m y asciende 12 m. Calcula el ángulo de elevación y la pendiente.



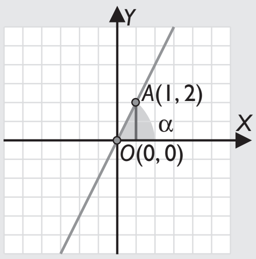
Solución:

$\text{sen } x = \dfrac{12}{150} \Rightarrow x = 4° \, 35' \, 19''$

Pendiente = tg 4° 35’ 19” = 0,08 = 8%

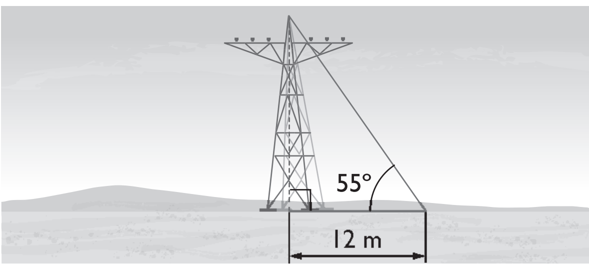
119 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(1, 2)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con la recta.

Solución:



$\text{tg } \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = 63° \, 26' \, 6''$

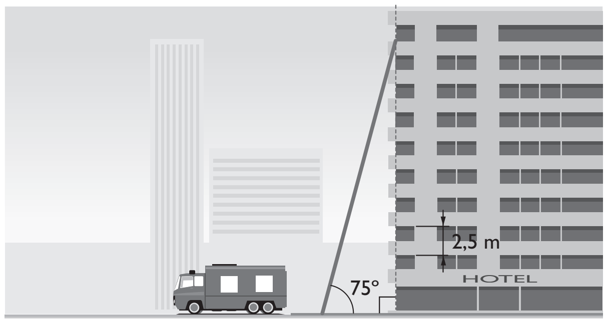
120 Halla la altura de una torre eléctrica sabiendo que a una distancia de 12 m de la base se ve la parte superior con un ángulo de 55°



Solución:

$\text{tg } 55° = \dfrac{h}{12} \Rightarrow h = 12 \text{ tg } 55° = 17,14 \text{ m}$

121 Una escalera de bomberos que mide 25 m está apoyada sobre la fachada de un hotel y forma con el suelo un ángulo de 75°. Si cada planta del hotel mide 2,5 m de altura, ¿a qué planta llegará como máximo?



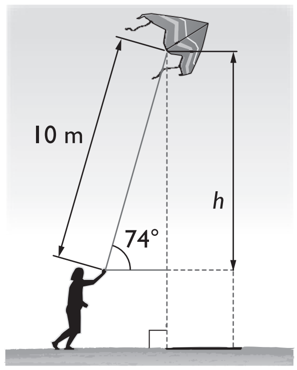
Solución:

$\text{sen } 75° = \dfrac{h}{25} \Rightarrow h = 25 \text{ sen } 75° = 24,15 \text{ m}$

N.° de planta: $\dfrac{24,15}{2,5} = 9,6$

Llega a la planta 10 porque pasa de la planta 9

122 Rocío está volando una cometa. Sabiendo que el hilo que ha soltado mide 10 m y el ángulo que forma con la horizontal es de 74°, calcula la altura a la que se encuentra.

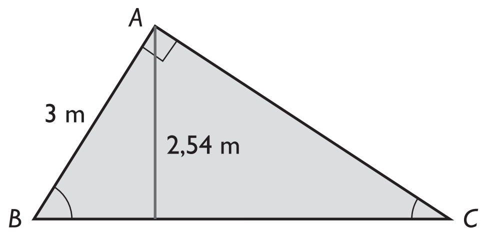


Solución:

$\text{sen } 74° = \dfrac{h}{10} \Rightarrow h = 10 \text{ sen } 74° = 9,6 \text{ m}$

9,6 m más la altura a la que tenga la mano Rocío.

123 En el siguiente triángulo rectángulo se conocen un cateto y la altura. Calcula los demás lados y ángulos.



Solución:

$\text{sen } B = \dfrac{2,54}{3} \Rightarrow B = 57° \, 51' \, 3''$

$C = 90° - 57° \, 51' \, 3'' = 32° \, 8' \, 57''$

$\cos B = \dfrac{3}{\text{Hipotenusa}}$

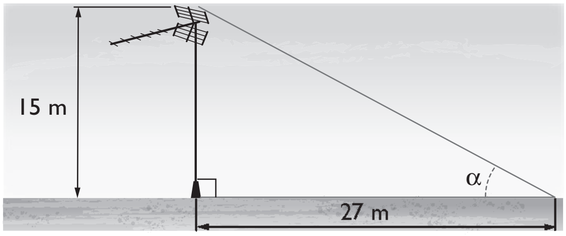
$\text{Hipotenusa} = \dfrac{3}{3 \cos 57° \, 51' \, 3''}$

Hipotenusa = 5,64 m

$\text{sen } B = \dfrac{\text{Cateto } AC}{\text{Hipotenusa}}$

Cateto AC = 5,64 sen 57° 51′ 3″ = 4,78 m

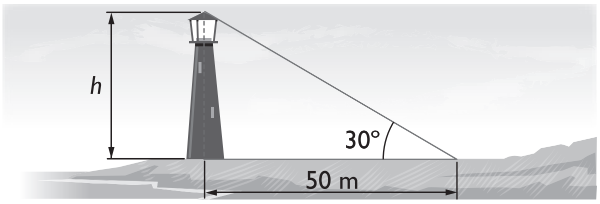
124 Una antena de televisión que mide 15 m proyecta una sombra de 27 m. Halla el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la punta más alta de la antena.



Solución:

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{15}{27} \Rightarrow \alpha = 29° \ 3' \ 17''$

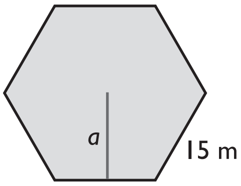
125 Un faro proyecta una sombra de 50 m, y el ángulo que forma el suelo con la recta que une el extremo de la sombra con la parte más alta del faro es de 30°. Halla la altura del faro.



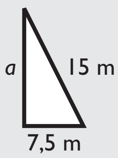
Solución:

$\text{tg}\ 30° = \dfrac{h}{50} \Rightarrow h = 50\ \text{tg}\ 30° = 28,87\ \text{m}$

126 Calcula la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 15 m

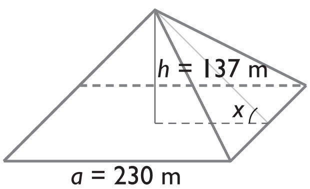


Solución:



$a = \sqrt{15^2 - 7,5^2} = 13\ \text{m}$

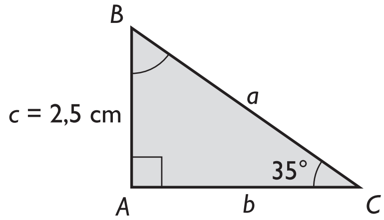
127 La pirámide de Keops de Egipto mide de alto 137 m, la base es cuadrada y tiene de arista 230 m. Halla el ángulo de inclinación de las caras laterales.



Solución:

$\text{tg}\ x = \dfrac{137}{115} \Rightarrow x = 49° \ 59' \ 22''$

128 En un triángulo rectángulo se conoce el cateto, $c = 2,5$ cm, y el ángulo opuesto, $C = 35°$. Calcula los demás lados y ángulos.



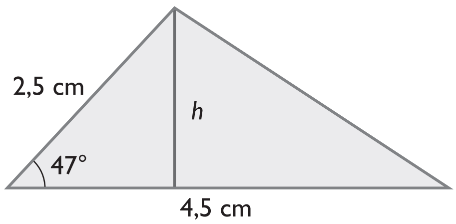
Solución:

$B = 90° - 35° = 55°$

$\text{sen}\ 35° = \dfrac{2,5}{a} \Rightarrow a = 4,36\ \text{cm}$

$\text{tg}\ 35° = \dfrac{2,5}{b} \Rightarrow b = 3,57\ \text{cm}$

129 Calcula el área del siguiente triángulo.

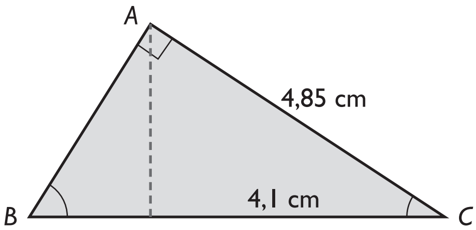


Solución:

$\text{sen}\ 47° = \dfrac{h}{2,5} \Rightarrow h = 1,83\ \text{cm}$

$\text{Área} = \dfrac{1}{2}\ 4,5 \cdot 1,83 = 4,12\ \text{cm}^2$

130 En el siguiente triángulo rectángulo se conocen un cateto y la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa. Calcula los demás lados y ángulos.



Solución:

$\cos C = \dfrac{4,1}{4,85} \Rightarrow C = 32° \ 17' \ 22''$

$B = 90° - 32° \ 17' \ 22'' = 57° \ 42' \ 38''$

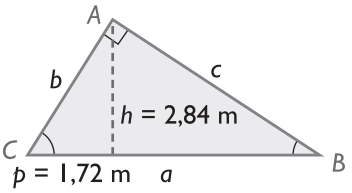
$\text{sen}\ 57° \ 42' \ 38'' = \dfrac{4,85}{\text{Hipotenusa}}$

Hipotenusa = 5,74 cm

$\text{tg}\ 57° \ 42' \ 38'' = \dfrac{4,85}{\text{Cateto } AB}$

Cateto AB = 3,06 cm

131 En el siguiente triángulo rectángulo se conocen la altura y la proyección de un cateto sobre la hipotenusa. Calcula los lados y los ángulos de dicho triángulo.



Solución:

$\text{tg } C = \dfrac{2,84}{1,72} \Rightarrow C = 58° \, 47' \, 58''$

$B = 90° - 58° \, 47' \, 58'' = 31° \, 12' \, 2''$

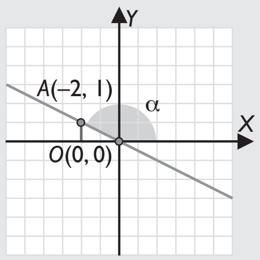
$\text{sen } B = \dfrac{2,84}{c} \Rightarrow c = 5,48 \text{ m}$

$\text{sen } C = \dfrac{2,84}{b} \Rightarrow b = 3,32 \text{ m}$

$\text{sen } B = \dfrac{3,32}{a} \Rightarrow a = 6,41 \text{ m}$

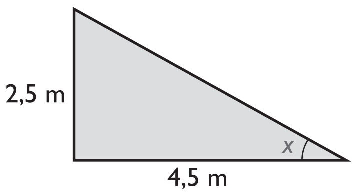
132 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(-2, 1)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

Solución:



$\text{tg } \alpha = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 153° \, 26' \, 6''$

133 Calcula el ángulo de elevación de una escalera de una casa que en 4,5 m de horizontal sube 2,5 m



Solución:

$\text{tg } x = \dfrac{2,5}{4,5} \Rightarrow \alpha = 29° \, 3' \, 17''$

134 Resuelve el sistema de ecuaciones trigonométricas:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } x - \text{sen } y &= 1 \\ 4 \text{ sen } x \text{ sen } y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se despeja sen x en la 1.ª ecuación y se sustituye en la 2.ª:

$\text{sen } x = \text{sen } y + 1$

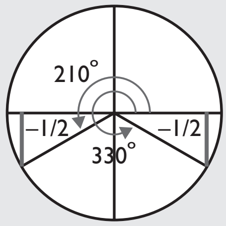
$4(\text{sen } y + 1) \text{ sen } y = -1$

$4 \text{ sen}^2 y + 4 \text{ sen } y + 1 = 0$

$(2 \text{ sen } y + 1)^2 = 0$

$2 \text{ sen } y + 1 = 0$

Si $\text{sen } y = -\dfrac{1}{2}$

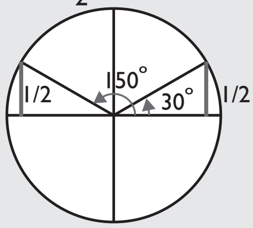


$y_1 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$y_2 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Para $\text{sen } y = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = \text{sen } y + 1 = \dfrac{1}{2}$

Si $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$



$x_1 = 30° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$x_2 = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

135 Resuelve el sistema de ecuaciones trigonométricas:

$$\left.\begin{aligned} \text{sen } x - \cos y &= \frac{1}{2} \\ 2 \text{ sen } x \cos y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se despeja sen x en la 1.ª ecuación y se sustituye en la 2.ª:

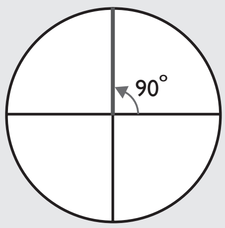
$\text{sen } x = \dfrac{1}{2} + \cos y$

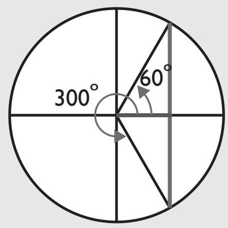
$2\left(\dfrac{1}{2} + \cos y\right)\cos y = 1$

$2 \cos^2 y + \cos y - 1 = 0$

$\cos y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$

Para $\cos y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{sen } x = 1$

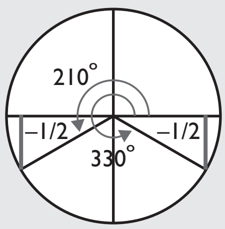


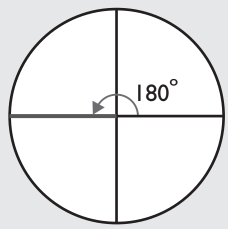


$x = 90° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

$y_1 = 60° + 360°k, k \in \mathbb{Z}, y_2 = 300° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Para $\cos y = -1 \Rightarrow \text{sen } x = -\dfrac{1}{2}$





$x_1 = 210° + 360°k, k \in \mathbb{Z}, x_2 = 330° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

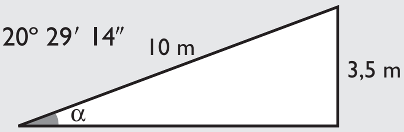
$y = 180° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Elabora problemas de más nivel

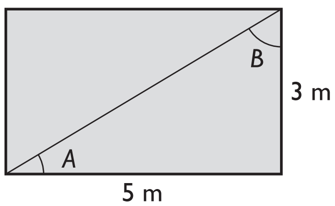
136 Una cinta transportadora tiene una longitud de 10 m y queremos que eleve la carga 3,5 m. ¿Qué ángulo de elevación hay que ponerle?

Solución:

$\text{sen } \alpha = \dfrac{3,5}{10} \Rightarrow \alpha = 20° \ 29' \ 14''$



137 Un rectángulo mide 5 m de largo y 3 m de alto. Halla el ángulo que forma la diagonal con cada uno de los lados.



Solución:

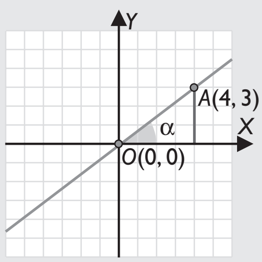
$\text{tg } A = \dfrac{3}{5} \Rightarrow A = 30° \ 57' \ 50''$

$B = 90° - 30° \ 57' \ 50'' = 59° \ 2' \ 10''$

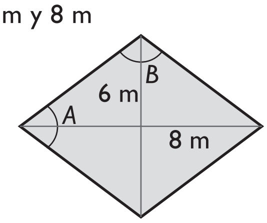
138 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(4, 3)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

Solución:

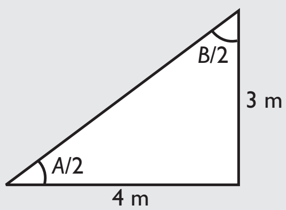
$\text{tg } \alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 36° \ 52' \ 12''$



139 Calcula los ángulos de un rombo en el que las diagonales miden 6 m y 8 m



Solución:

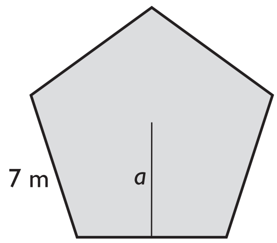


$\text{tg } \dfrac{A}{2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{A}{2} = 36° \ 52' \ 12''$

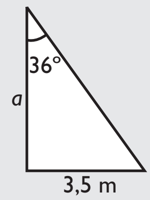
$A = 73° \ 44' \ 24''$

$B = 180° - 73° \ 44' \ 23'' = 106° \ 15' \ 36''$

140 Calcula la apotema de un pentágono regular cuyo lado mide 7 m

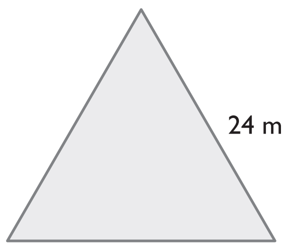


Solución:

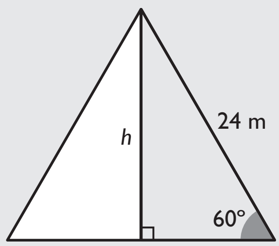


$\text{tg } 36° = \dfrac{3,5}{a} \Rightarrow a = \dfrac{3,5}{\text{tg } 36°} = 4,82 \text{ m}$

141 Calcula el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 24 m



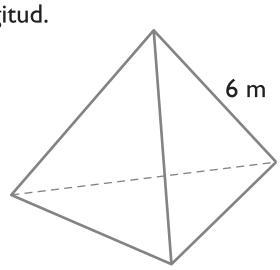
Solución:



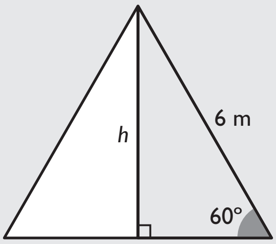
$\text{sen } 60° = \dfrac{h}{24} \Rightarrow h = 24 \text{ sen } 60° = 20,78 \text{ m}$

$A = \dfrac{1}{2} 24 \cdot 20,78 = 249,36 \text{ m}^2$

142 Calcula el área de un tetraedro en el que la arista mide 6 m de longitud.



Solución:



Previamente se calcula el área de un triángulo equilátero:

$\text{sen } 60° = \dfrac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \text{ sen } 60°$

$h = 3\sqrt{3}$ m

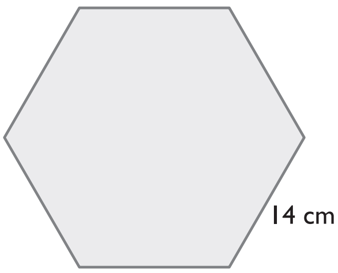
Área de un triángulo equilátero:

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ m^2

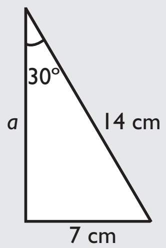
Tetraedro:

$A_{Tetraedro} = 4 \cdot 9\sqrt{3} = 36\sqrt{3} = 62,35$ m^2

143 Calcula el área de un hexágono regular cuyo lado mide 14 cm



Solución:



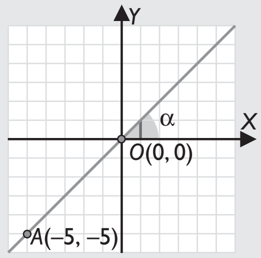
$\cos 30° = \dfrac{a}{14} \Rightarrow a = 14 \cos 30°$

$a = 12,12$ cm

$A = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 14 \cdot 12,12 = 509,04$ cm^2

144 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(-5, -5)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

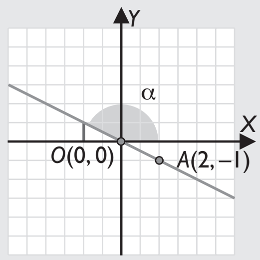
Solución:



$\alpha = 45°$

145 Dibuja en unos ejes coordenados una recta que pase por el origen de coordenadas $O(0, 0)$ y por el punto $A(2, -1)$. Halla el ángulo que forma el semieje positivo de abscisas con dicha recta.

Solución:



$\text{tg } \alpha = \dfrac{1}{-2} \Rightarrow \alpha = 153° \; 26' \; 6''$