La Salle Virlecha - Antequera Departamento de Ciencias Curso 2023-2024	**Matemáticas 1** *(1º B y C)*		
	2ª Evaluación	Global	8 de marzo de 2024
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 90 min. NUMERAR LAS CARILLAS

PUNTUACIÓN: 2 puntos cada problema.

1--Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \log_3 x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Estudia su continuidad (estudiando los límites) y represéntala

2—Calcula los siguientes límites en los puntos que se indican:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{2x-6}{x^2-9}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x-4}-\frac{x^3+2x-1}{x^2-4}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{-2x^2+2}{2x^2-4x+2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(2x-\sqrt{4x^2-3x}\right)$

3--
Dadas las funciones:

$$f(x)=\frac{3x-3}{x-2} \qquad g(x)=3x-2 \qquad h(x)=\cos x$$

Obtén:

a) f^{-1} b) $f \circ h$ c) $h \circ f$ d) $(g \circ f)^{-1}$

4-- Estudia las asíntotas de las funciones a) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-3}$ b) $g(x)=\frac{x^2+1}{2x+2}$

5-- Calcula el dominio de las funciones: a) $f(x)=\sqrt{\frac{3x}{3x^2-3}}$ b) $g(x)=\ln\frac{2x^2-4}{x+1}$

(1) $f(x) = x-1$ función lineal (2 puntos)

1	0
0	-1

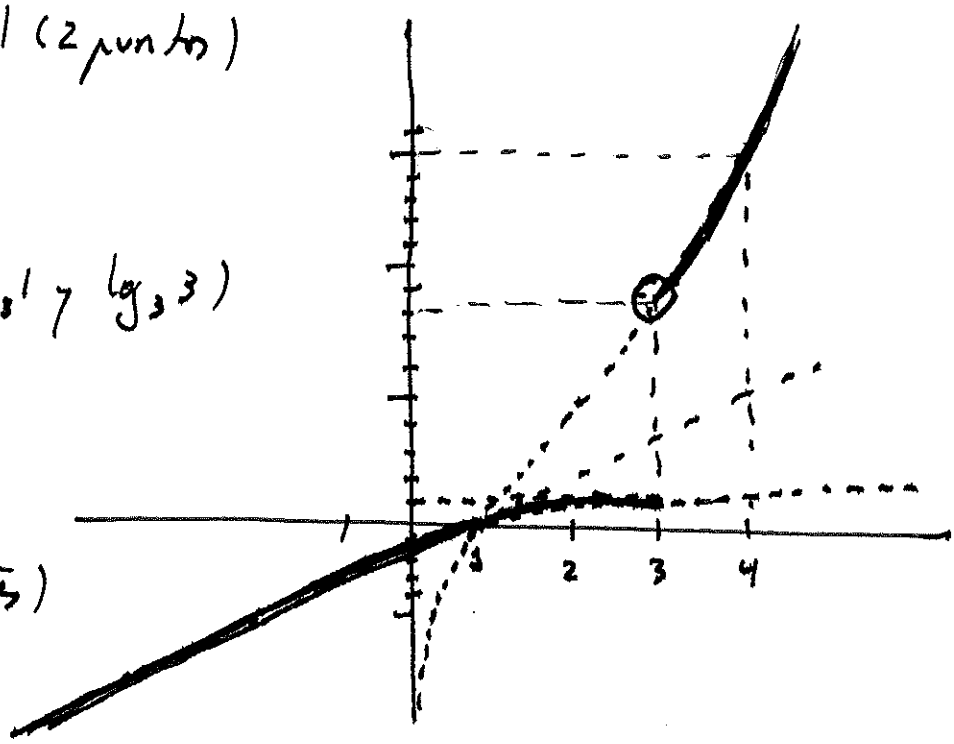
$f(x) = \log_3 x$ (cogemos $\log_3 1$ y $\log_3 3$)

1	0
3	1

$f(x) = x^2 - 1$ (vértice y cortes)

$x_v = 0$

corte: $x = \pm 1$



Estudio de la continuidad:

$x < 1 \rightarrow$ Continua por ser polinómica.

$x = 1 \rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x-1) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \log_3 x = 0$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$

$f(1) = \log_3 1 = 0$

continua en $x = 1$

$1 < x < 3 \rightarrow$ Continua por ser logarítmica (en su dominio)

$x = 3 \rightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \log_3 3 = 1$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 1 = 8$

Discontinuidad de salto finito en $x = 3$

$x > 3 \rightarrow$ Continua por ser polinómica.

(2)

a) $\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{x^2-9} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+3}{2x-4} - \frac{x^3+2x-1}{x^2-4} \right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2+3)(x+2)-2(x^3+2x-1)}{2(x+2)(x-2)}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x^3}+4x^2+3x+6-\cancel{2x^3}-4x+2}{2(x^2-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-x+8}{2x^2-8} = \boxed{2}$

c) $\lim_{x\to 1} \frac{-2x^2+2}{2x^2-4x+2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{-2(x^2-1)}{2(x-1)^2} =$

$\lim_{x\to 1} \frac{-(x+1)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x+1)}{x-1} = \left[-\frac{2}{0}\right]$

$\lim_{x\to 1^-} -\frac{(x+1)}{x-1} = \left[\frac{-2}{-0}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to 1^+} -\frac{(x+1)}{x-1} = \left[\frac{-2}{+0}\right] = -\infty$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2-3x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-\sqrt{4x^2-3x})(2x+\sqrt{4x^2-3x})}{2x+\sqrt{4x^2-3x}}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-(4x^2-3x)}{2x+\sqrt{4x^2-3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{4x} = \boxed{\frac{3}{4}}$

(3)

a) $y = \frac{3x-3}{x-2} \rightarrow yx - 2y = 3x - 3 \rightarrow yx - 3x = 2y - 3 \Rightarrow$

$x(y-3) = 2y - 3 \Rightarrow x = \frac{2y-3}{y-3}$

Así $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x-3}}$

b) $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\cos x) = \boxed{\frac{3\cos x - 3}{\cos x - 2}}$

c) $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{3x-3}{x-2}\right) = \boxed{\cos \frac{3x-3}{x-2}}$

d) $(g \circ f)^{-1}$

Primero calculamos $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{3x-3}{x-2}\right) =$

$3\left(\frac{3x-3}{x-2}\right) - 2 = \frac{9x-9}{x-2} - 2 = \frac{9x-9-2x+4}{x-2} = \frac{7x-5}{x-2}$

Así $y = \frac{7x-5}{x-2}$ y ahora, calculamos la inversa:

$y(x-2) = 7x - 5 \Rightarrow yx - 2y = 7x - 5 \Rightarrow yx - 7x = 2y - 5$

$x(y-7) = 2y - 5$

$x = \frac{2y-5}{y-7} \Rightarrow \boxed{(g \circ f)^{-1} = \frac{2x-5}{x-7}}$

④

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3}$

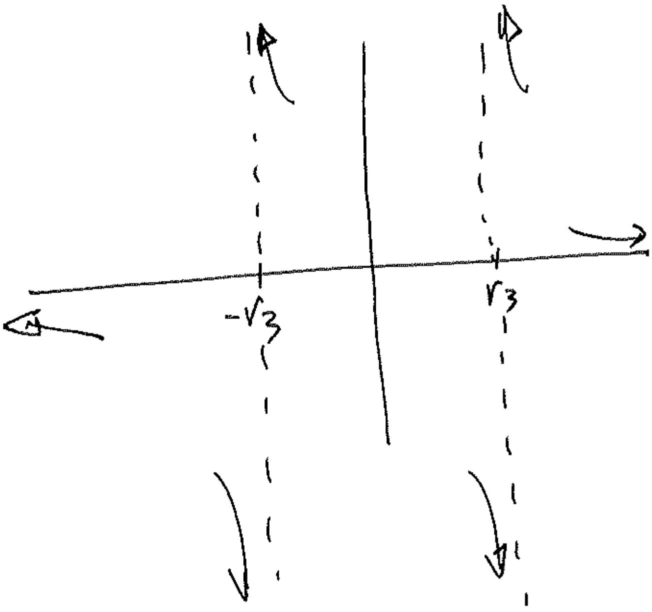
A. Horizontal: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x^2-3} = 0 \rightarrow$ A.H $\boxed{y=0}$

$\Downarrow$ No tiene oblicuas.

	$y=0$	$f(x)$
10	0	0'09...
100	0	0'009...
-10	0	-0'113...
-100	0	-0'01...

En $+\infty$ se acerca por arriba

En $-\infty$ se acerca por abajo.



A. Vertical:

$x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$\boxed{x = -\sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^-} \dfrac{x-1}{x^2-3} = \left[\dfrac{-\sqrt{3}-1}{+0}\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\sqrt{3}^+} \dfrac{x-1}{x^2-3} = \left[\dfrac{-\sqrt{3}-1}{-0}\right] = +\infty$

$\boxed{x = \sqrt{3}}$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^-} \dfrac{x-1}{x^2-3} = \left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{-0}\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \sqrt{3}^+} \dfrac{x-1}{x^2-3} = \left[\dfrac{\sqrt{3}-1}{+0}\right] = +\infty$

b) $g(x) = \dfrac{x^2+1}{2x+2}$

A.H: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+1}{2x+2} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntota horizontal.

A. Vertical:

$2x+2=0 \rightarrow x=-1$

$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+1}{2x+2} = \left[\frac{2}{-0}\right] = -\infty$

$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2+1}{2x+2} = \left[\frac{2}{+0}\right] = +\infty$

Asíntota vertical en $\boxed{x=-1}$

A. oblicuas:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+2x} = \frac{1}{2}$

$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x+2} - \frac{x}{2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x(x+1)}{2x+2}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{2x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x+1}{2x+2} = -\frac{1}{2}$

Ecuación de la asíntota oblicua:

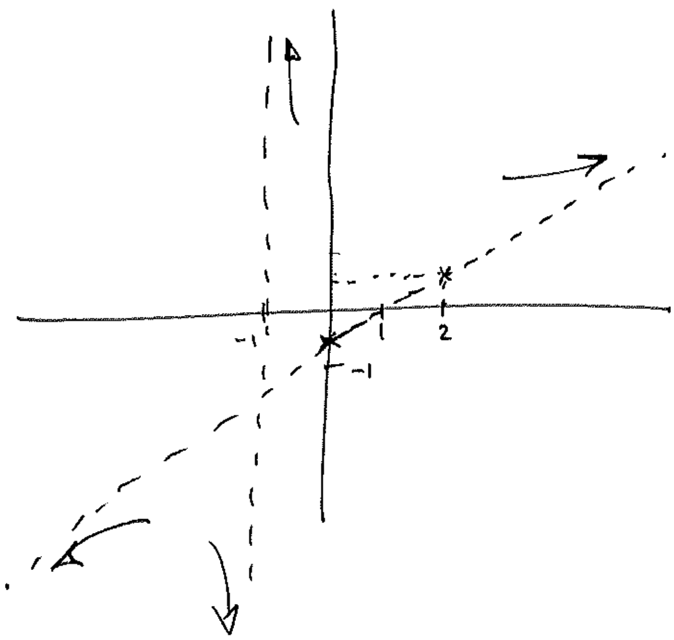
$\boxed{y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$

0	-1/2
1	0

	Asíntota	$\frac{x^2+1}{2x+2}$
10	4'5	4'59...
100	49'5	49'50...
-10	-5'5	-5'61...
-100	-50'5	-50'51...

En $+\infty$ se acerca por arriba

En $-\infty$ se acerca por abajo



(5)

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x}{3x^2-3}}$

El dominio será $\dfrac{3x}{3x^2-3} \geq 0$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-1 \quad 0 \quad +1$

$3x = 0 \to x = 0$

$3x^2-3 = 0 \to x = \pm 1$

$$\boxed{Dom(f) = (-1, 0] \cup (1, +\infty)}$$

b) $g(x) = \ln \dfrac{2x^2-4}{x+1}$

El dominio será la solución de $\dfrac{2x^2-4}{x+1} > 0$

$2x^2-4 = 0 \to x = \pm\sqrt{2}$

$x+1 = 0 \to x = -1$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-\sqrt{2} \quad -1 \quad \sqrt{2}$

$$\boxed{Dom(g) = (-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)}$$