La Salle Virlecha - Antequera Departamento de Ciencias Curso 2023-2024	Matemáticas 1 1ºB-C		
	3ª Evaluación	Global	5 de junio de 2024
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. ***NUMERAR CADA CARILLA***. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente, aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 90 minutos.

PUNTUACIÓN: La especificada

Calcula la función derivada de cada una de las siguientes funciones, simplificando cuando sea posible (1 punto cada una)

1--$f(x) = e^{3x} sec(2x)$
2--$f(x) = arctan(cos)$
3-- Dada la función: $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$, calcula (3 puntos):

a) Dominio, signo, simetrías, puntos de corte y asíntotas
b) Monotonía, extremos, curvatura e inflexión
c) Representación gráfica

4-- Calcula monotonía, curvatura, extremos y puntos de inflexión de (2 puntos)

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

5--El área de un rectángulo es 180 cm^2. ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo? (1 punto)

6--Halla la ecuación de la recta tangente y normal a la curva $f(x) = \frac{1}{x-2}$ en el punto x=4 (1 punto)

7--Halla una función de segundo grado sabiendo que pasa por (0,1) y que la pendiente de la recta tangente en el punto (2, -1) vale 0. (1 punto)

RESOLUCIÓN EXAMEN.

(1) $\left(e^{3x}\sec(2x)\right)' = \left(e^{3x}\cdot\cos^{-1}(2x)\right)' = \left(e^{3x}\right)'\cos^{-1}(2x) + e^{3x}\cdot\left(\cos^{-1}(2x)\right)'$

$\left(e^{3x}\right)' = 3e^{3x}$

$\left(\cos^{-1}(2x)\right)' = -\cos^{-2}(2x)\cdot\left(\cos(2x)\right)' =$

$= -\cos^{-2}(2x)(-\operatorname{sen}2x)\cdot 2 =$

$\dfrac{2\operatorname{sen}2x}{\cos^2 2x} = 2\,\dfrac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}\cdot\dfrac{1}{\cos 2x} =$

$2\operatorname{tg}2x\sec 2x$

$= 3e^{3x}\cdot\cos^{-1}(2x) + e^{3x}\cdot 2\operatorname{tg}2x\sec 2x$

$= 3e^{3x}\sec 2x + e^{3x}\cdot 2\operatorname{tg}2x\sec 2x =$

$\boxed{e^{3x}\sec 2x\left(3+2\operatorname{tg}2x\right)}$

(2) $\left(\operatorname{arctg}(\cos x)\right)' = \dfrac{1}{1+\cos^2 x}\cdot(\cos x)' = \boxed{\dfrac{-\operatorname{sen}x}{1+\cos^2 x}}$

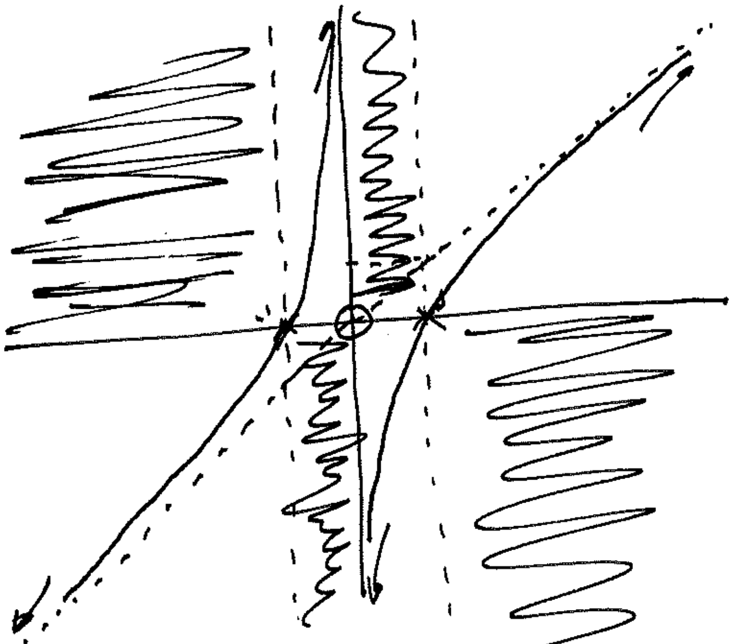
(3) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$

a) • $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}-\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

• Signo $\quad x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

$\quad x=0$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ \hline & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$



$f(x)>0 \quad (-1,0)\cup(1,+\infty)$

$f(x)<0 \quad (-\infty,-1)\cup(0,1)$

• Simetría:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2-1}{-x} = \dfrac{x^2-1}{-x} = -f(x) \Rightarrow$

IMPAR

- Puntos corte:

Eje Y → No tiene (El $x=0$ no está en el dominio)

Eje X → $\frac{x^2-1}{x}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$

Ptos de corte: $(-1,0)$ y $(1,0)$

- Asíntotas:

→ Verticales: $\boxed{x=0}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \left[\frac{-1}{-0}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \left[\frac{-1}{0}\right] = -\infty$$

→ Horizontales: NO TIENE

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} = \infty$$

→ Oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x)-mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1-x^2}{x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Así, la ecuación de la asíntota es $\boxed{y=x}$

		$f(x)=\frac{x^2-1}{x}$	$y=x$	Aproximación
$+\infty$	$(x=1000)$	999'9	1000	→ Por abajo
$-\infty$	$(x=-1000)$	-999'9	-1000	→ Por arriba

b) $$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)' = \frac{2x\cdot x-(x^2-1)}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)' = \frac{2x\cdot x^2-(x^2+1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Así, estudiamos:

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} \rightarrow x^2+1=0 \rightarrow \text{No sol}$$
$$x^2=0 \rightarrow x=0 \text{ (doble)}$$

$f'>0$ $\nearrow$ 0 $f'>0$ $\nearrow$

Creciente en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ (Todo su dominio)
No tiene extremos.

- Curvatura:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \qquad -2=0 \rightarrow \text{No sol}$$
$$x^3=0 \rightarrow x=0 \text{ (triple)}$$

$f''>0$ $\cup$ 0 $f''<0$ $\cap$

f cóncava en $(0,+\infty)$
f convexa en $(-\infty,0)$

No tiene ptos inflexión ($x=0$ no está en el dominio).

---

(4) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ $\quad f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{(x^2+1)^2}\right)' = \frac{4(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{4(x^2+1)-16x^2}{(x^2+1)^3} =$$

$$\frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = \frac{-4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$

- Monotonía y extremos: $4x=0 \rightarrow x=0$
$x^2+1=0 \rightarrow \text{No}$

$f'<0$ $\searrow$ Mínimo $\downarrow$ 0 $f'>0$ $\nearrow$

f decrece en $(-\infty,0)$ // f creciente en $(0,+\infty)$. $\boxed{\text{Mínimo } (0,-1)}$

- Curvatura e inflexión: $3x^2-1=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{1/3}$
$x^2+1=0 \rightarrow \text{NO}$

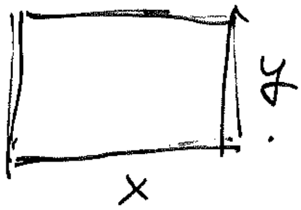
f cóncava $(-\infty,-\sqrt{1/3})\cup(\sqrt{1/3},+\infty)$
f convexa $(-\sqrt{1/3},\sqrt{1/3})$

Inflexión $(-\sqrt{1/3},-\frac{1}{2})$ $(\sqrt{1/3},-\frac{1}{2})$

$f''<0$ $\cap$ $-\sqrt{1/3}$ $f''>0$ (+) $\sqrt{1/3}$ $f''<0$ $\cap$

Inflexión

(5)



Área $= 180\,cm^2 \rightarrow xy = 180$

La función será el perímetro:

$$f(x,y) = 2x + 2y \Rightarrow f(x) = 2x + \frac{2 \cdot 180}{x}$$

$$y = \frac{180}{x} \qquad f(x) = 2x + \frac{360}{x}$$

Buscamos posibles extremos: $f'(x) = 2 - \frac{360}{x^2} = 0$

$$2 = \frac{360}{x^2} \Rightarrow x^2 = 180 \Rightarrow x = \pm\sqrt{180}$$

La única posible solución es $\sqrt{180}$.

Comprobamos si es un extremo: $f''(x) = -360 \cdot (-2)\,x^{-3} =$

$= f''(x) = \frac{720}{x^3} \Rightarrow f''(\sqrt{180}) > 0 \Rightarrow$ Es un mínimo

Así, la solución es: $\boxed{\begin{array}{l} x = \sqrt{180}\ cm \\ y = \frac{180}{\sqrt{180}} = \sqrt{180}\ cm \end{array}}$ Es un cuadrado

(6) Primero hallamos la derivada:

$f'(x) = \left(\frac{1}{x-2}\right)' = \frac{-1}{(x-2)^2}$. Así, la pendiente de la recta tangente será: $f'(4) = \frac{-1}{(4-2)^2} = -\frac{1}{4}$

El punto por el que pasa es $(4, f(4)) = (4, \frac{1}{2})$

Así tenemos: $\boxed{\begin{array}{l} \text{Recta tangente: } y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-4) \\ \text{Recta normal: } y - \frac{1}{2} = 4(x-4) \end{array}}$

⑦ $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pasa por $(0,1) \Rightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 1 \Rightarrow c = 1$

Pasa por $(2,-1) \Rightarrow a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = -1 \Rightarrow 4a + 2b + c = -1$

La pendiente vale $0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

$f'(2) = 0 \Rightarrow 2a\cdot 2 + b = 0$

Luego, nos queda:

$$\left.\begin{array}{r} c = 1 \\ 4a+2b+c = -1 \\ 4a+b = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 4a + 2b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{array}\right\}$$

$$2b - b = -2 - 0$$
$$b = -2$$

$$4a - 2 = 0 \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Solución: $a = \frac{1}{2} \quad b = -2 \quad c = 1$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1}$$