

 Departamento de Ciencias Curso 2023-2024	Matemáticas 1 1ºC		
	3ª Evaluación	Ordinaria	junio de 2024
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente, aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 90 minutos.

NUMERAR LAS CARILLAS

Los alumnos que tienen suspensa la 1ª Evaluación hacen el problema 10 y NO hacen 7 ni 8

PUNTUACIÓN: La especificada

Calcula la función derivada de cada una de las siguientes funciones, simplificando cuando sea posible (1 punto cada una):

1. $f(x) = 2 \operatorname{sen}^2 \sqrt{x}$

2. $f(x) = e^{3x} \sec(x)$

3. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

4. $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}$

5. $f(x) = \arctan(\ln x)$

6. Dada la función: $f(x) = \frac{x^2+3x}{x+1}$, calcula (2 puntos):

- Dominio, signo, simetrías, puntos de corte y asíntotas
- Monotonía, extremos, curvatura e inflexión

7. Calcula la ecuación de la recta tangente y normal de la curva $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ en el punto $x=2$ (1 punto)

8. Se quiere construir una pecera de metacrilato ortoédrica (caja de zapatos) abierta por arriba, cuya base es un rectángulo el doble de largo que de ancho y con capacidad de 36 dm³. ¿Cuáles deben ser sus dimensiones para minimizar el gasto de material? (1 punto)

9. Calcula a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ tenga un punto de inflexión en P(1,2) (1 punto)

10. Resuelve por el método de Gauss (2 puntos): (SOLO LO HACEN LOS QUE TENGAN SUSPENSO EL PRIMER TRIMESTRE)

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ 3x + y - z = -18 \\ 2x - y + 3z = 12 \end{cases}$$

$$(1) (2 \sin^2 \sqrt{x})' = 2(\sin^2 \sqrt{x})' = 2 \cdot 2 \sin \sqrt{x} \cdot (\sin \sqrt{x})' =$$

$$(\sin \sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} (\sqrt{x})' = \frac{\cos \sqrt{x}}{2 \sqrt{x}} \quad \frac{4 \sin \sqrt{x} \cdot \cos \sqrt{x}}{2 \sqrt{x}} = \boxed{\frac{2 \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$$

$$(2) (e^{3x} \sec x)' = (e^{3x})' \sec x + e^{3x} (\sec x)' = 3e^{3x} \sec x + e^{3x} \sec x \tan x$$

$$(e^{3x})' = 3e^{3x} \quad = \boxed{e^{3x} \sec x (3 + \tan x)}$$

$$(\sec x)' = (\cos^{-1} x)' = -\cos^{-2} x \cdot (\cos x)' = -\cos^{-2} x \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x$$

$$(3) (x^2 e^{-3x})' = (x^2)' e^{-3x} + x^2 (e^{-3x})' = 2x e^{-3x} + x^2 \cdot (-3) e^{-3x} =$$

$$2x e^{-3x} - 3x^2 e^{-3x} = \boxed{x e^{-3x} (2 - 3x)}$$

$$(4) \left[\ln \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}} \right) \right]' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}} \right)' = \frac{-\frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2+3)^2}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}}} =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2+3}} \right)' = ((x^2+3)^{-1/3})' = -\frac{1}{3} (x^2+3)^{-4/3} \cdot 2x = \frac{-2x \sqrt[3]{x^2+3}}{3(x^2+3) \sqrt[3]{(x^2+3)^2}} =$$

$$= -\frac{2x}{3} (x^2+3)^{-4/3} = -\frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2+3)^4}}$$

$$= \frac{-2x}{3(x^2+3) \sqrt[3]{x^2+3}}$$

$$\boxed{\frac{-2x}{3(x^2+3)}}$$

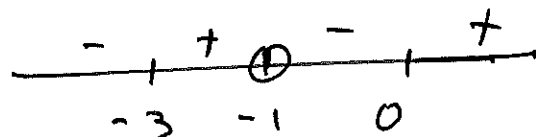
$$(5) \quad (\arctan(\ln x))' = \frac{1}{1 + \ln^2 x} \cdot (\ln x)' = \frac{1/x}{1 + \ln^2 x} =$$

$$\boxed{\frac{1}{x + x \ln^2 x}}$$

$$(6) \quad f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$$

a) • Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

• Signo: $x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0$
 $\hookrightarrow x = 0 \cup x = -3$



$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \quad (1)$$

$f(x) > 0$ en $(-3, -1) \cup (0, +\infty)$
 $f(x) < 0$ en $(-\infty, -3) \cup (-1, 0)$

• $f(-x) = \frac{x^2 - 3x}{-x + 1}$ No tiene simetría $\left(\begin{array}{l} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{array} \right)$

• Cortes: $OX: f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3$
 $OY: f(0) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{(0,0), (-3,0)}$

• Asintotas: A.H: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Rightarrow$ No hay A.H.

A.V: $x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$ $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \left[\frac{-2}{-0} \right] = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x}{x + 1} = \left[\frac{-2}{+0} \right] = -\infty$

A. oblicua :

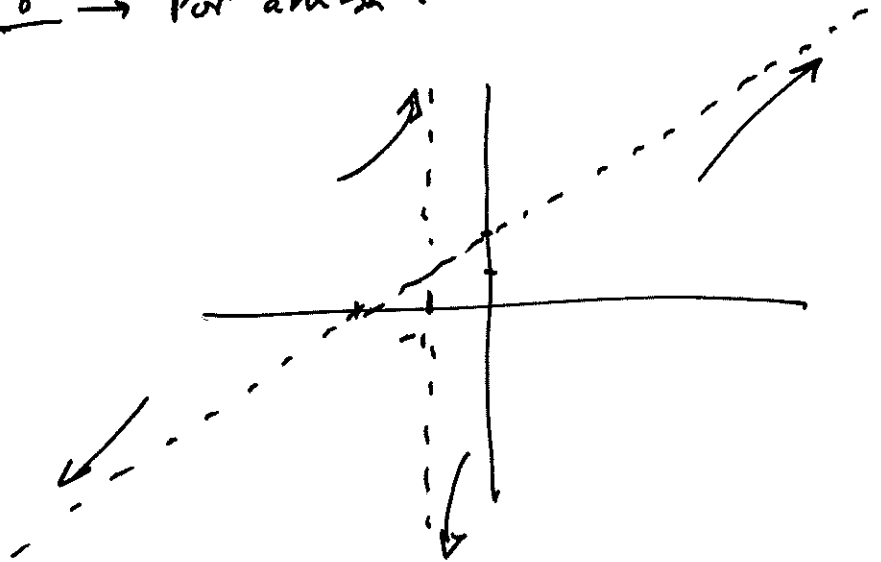
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x+1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - x^2 - x}{x+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

Así, la ecuación de la asíntota es $y = x + 2$

	$y = x + 2$	$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1}$	
100	102	101.98	→ Por abajo (+∞)
-100	-98	-97.98	→ Por arriba (-∞)

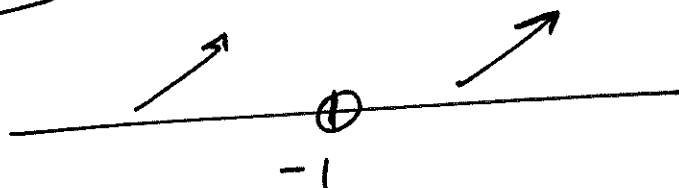


$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + 3x}{x+1} \right)' = \frac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x+1)^2} =$$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2}$$

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \rightarrow \text{No sol.}$$

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \text{ (doble)}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$
No tiene extremos.

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \right)' = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2 + 2x + 3) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$\frac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 3) \cdot 2}{(x+1)^3} = \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x - 6}{(x+1)^3}$$

$$= \frac{-4}{(x+1)^3} \quad (x+1) = 0 \rightarrow x = -1 \quad (3)$$

$$\begin{array}{c} (+) \quad \oplus \quad (-) \\ \hline -1 \end{array}$$

$f(x)$ convexa en $(-\infty, -1)$
 $f(x)$ cóncava en $(-1, +\infty)$
 No hay pto inflexión
 ($x = -1$ no está en el dominio).



7 $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

$$f'(x) = \frac{x-3 - (x+1)}{(x-3)^2} = \frac{-4}{(x-3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-4}{(2-3)^2} = -4$$

$$f(2) = \frac{2}{-1} = -2$$

Tangente:

$$y - (-3) = -4(x - 2)$$

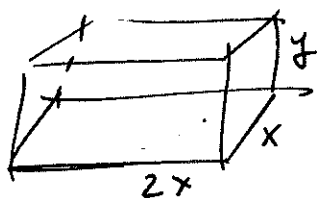
$$\boxed{y + 3 = -4(x - 2)}$$

Normal:

$$\boxed{y + 3 = \frac{1}{4}(x - 2)}$$



(8)



$$\text{Capacidad (volumen)} = 36 \text{ dm}^3 \Rightarrow$$

$$2x \cdot x \cdot y = 36$$

$$\underline{2x^2 y = 36}$$

Minimizar material = minimizar superficie $\Rightarrow$

$$S = \underbrace{2x^2}_{\text{(base)}} + \underbrace{2 \cdot 2xy}_{\substack{\text{(cara frontal)} \\ \text{y trasera}}} + \underbrace{2 \cdot xy}_{\substack{\text{(caras} \\ \text{laterales)}}} = 2x^2 + 4xy + 2xy = 2x^2 + 6xy$$

Buscamos un mínimo:

$$2x^2 y = 36 \Rightarrow y = \frac{36}{2x^2} = \frac{18}{x^2}$$

$$S = 2x^2 + 6xy = 2x^2 + 6x \cdot \frac{18}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}$$

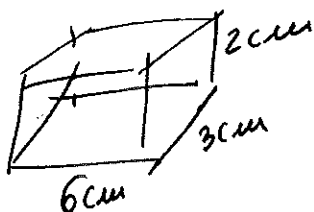
$$S' = 4x - \frac{108}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x = \frac{108}{x^2} \Rightarrow x^3 = 27$$

$$\text{Así } x = \sqrt[3]{27} = 3 \text{ cm}$$

$$2x = 6 \text{ cm}$$

$$y = \frac{18}{x^2} = \frac{18}{9} = 2 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{aligned} S''(x) &= 4 - 108 \cdot (-2)x^{-3} \\ &= 4 + \frac{216}{x^3} \\ S''(3) &> 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo}} \end{aligned} \right\}$$



← Dimensiones.



(9)

$f(x) = x^3 + ax^2 + b$ Pto inflexión en $P(1, 2)$

La función pasa por el pto de inflexión $\Rightarrow f(1) = 2$

$$\text{Así } 2 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \Rightarrow a + b + 1 = 2$$

$$\boxed{a + b = 1}$$

Además, $f''(1) = 0 \Rightarrow$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax \quad ; \quad f''(x) = 6x + 2a$$

$$f''(1) = \boxed{6 + 2a = 0}$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3$$

$$\begin{aligned} b &= 1 - a = 1 - (-3) \\ b &= 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Solución: } \begin{aligned} a &= -3 \\ b &= 4 \end{aligned}}$$

(10)

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 3 & 1 & -1 & -18 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{3I - I \\ 2I - III}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 0 & -10 & 13 & 81 \\ 0 & -5 & 5 & 30 \end{pmatrix}$$

$$II - 2III \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 21 \\ 0 & -10 & 13 & 81 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= -4 \\ y &= 1 \\ z &= 7 \end{aligned}}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 21 \\ -10y + 13z = 81 \\ 3z = 21 \end{cases}$$

$$-10y + 91 = 81 \Rightarrow -10y = -10$$

$$\underline{\underline{y = 1}}$$

$$x - 3 + 28 = 21$$

$$x = 21 - 25$$

$$\underline{\underline{x = -4}}$$