La Salle Virlecha - Antequera Departamento de Ciencias Curso 2024-2025	**Matemáticas 1** *(1º B y C)*		
	2ª Evaluación	Global	13 de marzo de 2025
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 90 min. NUMERAR LAS CARILLAS

PUNTUACIÓN: 2 puntos cada problema. CE: 1.2 3.2 5.1 5.2 6.1 7.1 7.2

1--Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} 4/x & \text{si} \quad x<0 \\ 3^x & \text{si} \quad 0\leq x\leq 2 \\ x^2+5 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad (estudiando los límites) y represéntala

2—Calcula los siguientes límites en los puntos que se indican:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x-4}{x^2-4}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{2x^2+x-3}{x-2}-\frac{2x^3+x-1}{2x^2-8}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{-2x^2+8}{2x^2-8x+8}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+5x}\right)$

3--

Dadas las funciones:

$$f(x)=\frac{x+4}{2x-2} \qquad g(x)=3x+4 \qquad h(x)=\text{sen } x$$

Obtén:

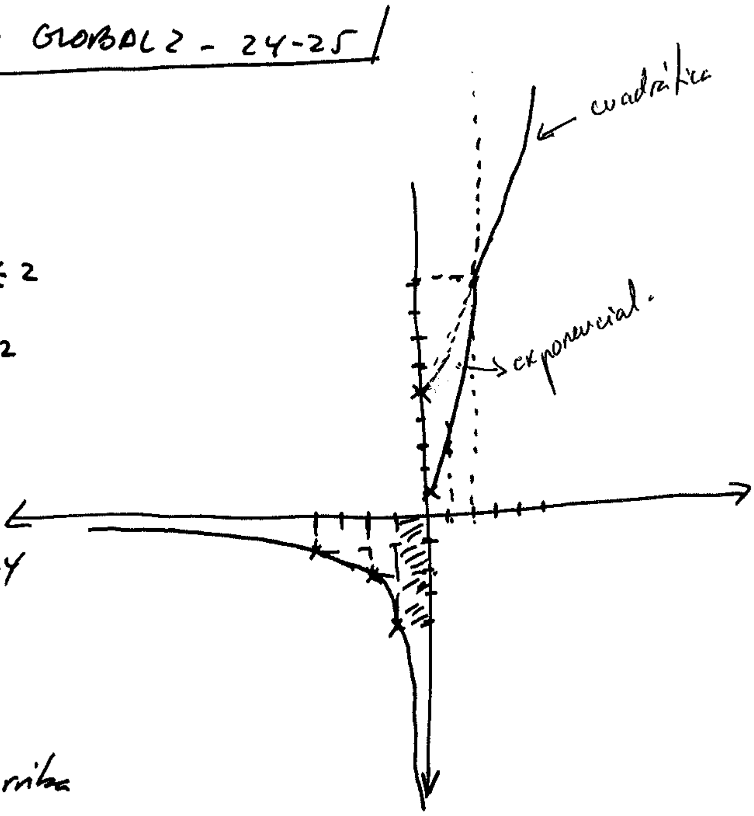
a) f^{-1} b) f o h c) h of d) $(g \circ f)^{-1}$

4-- Estudia las asíntotas de las funciones a) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2}$ b) $g(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$

5-- Calcula la función derivada: a) $f(x)=\frac{xe^x}{x+e^x}$ b) $g(x)=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}}+x\sqrt{x}$

RESOLUCIÓN GLOBAL 2 - 24-25

① $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3^x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ x^2+5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$



$\frac{4}{x} \rightarrow$ Hipérbola equilátera. Área $=4$

$3^x \rightarrow$ Exponencial :

0	1
1	3

$x^2+5 \rightarrow x^2$ desplazada 5 hacia arriba

Estudio de la continuidad:

- $x < 0$ continua, por ser función racional en su dominio.
- $x = 0$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{4}{x} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 3^x = 3^0 = 1 \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Discont. de salto } \infty \text{ en } x=0}$
- $0 < x < 2$ continua, por ser función exponencial
- $x = 2$ $\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3^x = 3^2 = 9 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2+5 = 2^2+5 = 9 \\ f(2) = 3^2 = 9 \end{array}\right\}$ $\boxed{\text{Continua en } x=2}$
- $x > 2$ continua, por ser una función polinómica.

Conclusión: $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. En $x=0$ presenta una discontinuidad de salto infinito

(2)

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-4}{x^2-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2}{x+2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2x^2+x-3}{x-2} - \dfrac{2x^3+x-1}{2x^2-8} \right) = [\infty - \infty] =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{(2x^2+x-3).2(x+2)}{(x-2)2(x+2)} - \dfrac{2x^3+x-1}{2(x+2)(x-2)} \right) =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+8x^2+2x^2+4x-6x-12-2x^3-x+1}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+10x^2-3x-11}{2x^2-8}$

$= \boxed{+\infty}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2x^2+8}{2x^2-8x+8} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-2.(x+2)(x-2)}{2.(x-2)^2} =$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-(x+2)}{x-2} = \left[\dfrac{-4}{0}\right] \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x+2)}{x-2} = \left[\dfrac{-4}{-0}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-(x+2)}{x-2} = \left[\dfrac{-4}{+0}\right] = -\infty \end{cases}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (2x - \sqrt{x^2+5x}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x-\sqrt{x^2+5x})(2x+\sqrt{x^2+5x})}{2x+\sqrt{x^2+5x}} =$

$[\infty - \infty]$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2-(x^2+5x)}{2x+\sqrt{x^2+5x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-5x}{2x+\sqrt{x^2+5x}} =$

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{2x+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{3x} = \boxed{+\infty}$

(3) $f(x) = \frac{x+4}{2x-2}$ $\quad g(x) = 3x+4$ $\quad h(x) = \operatorname{sen} x$

a) $y = \frac{x+4}{2x-2} \rightarrow 2xy - 2y = x+4 \rightarrow x(2y-1) = 2y+4 \rightarrow$

$x = \frac{2y+4}{2y-1} \Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{2x+4}{2x-1}}$

b) $\boxed{(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(\operatorname{sen} x) = \frac{\operatorname{sen} x + 4}{2\operatorname{sen} x - 2} = \frac{4+\operatorname{sen} x}{-2+2\operatorname{sen} x}}$

c) $\boxed{(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h\left(\frac{x+4}{2x-2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{x+4}{2x-2}\right)}$

d) $(g \circ f)^{-1}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+4}{2x-2}\right) = 3\left(\frac{x+4}{2x-2}\right)+4 =$

$\frac{3x+12}{2x-2} + 4 = \frac{3x+12+8x-8}{2x-2} = \frac{11x+4}{2x-2}$

Ahora calculo su inversa:

$y = \frac{11x+4}{2x-2} \rightarrow 2xy - 2y = 11x+4$

$x(2y-11) = 2y+4$

$x = \frac{2y+4}{2y-11} \rightarrow \boxed{(g \circ f)^{-1} = \frac{2x+4}{2x-11}}$

④ $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-2}$

a)

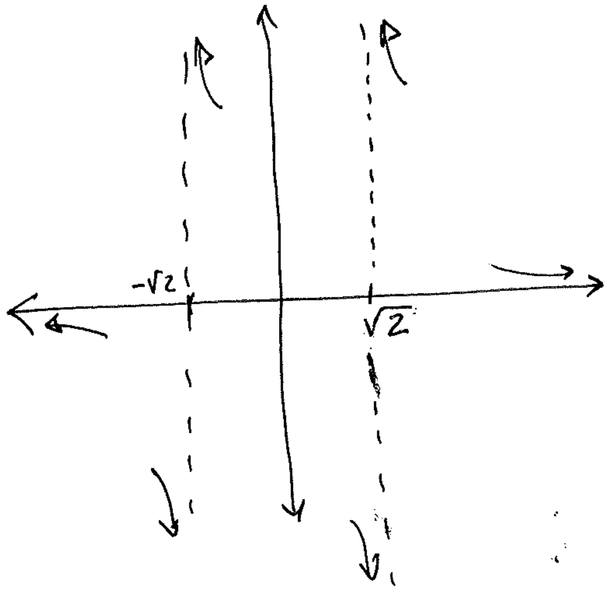
A. Horiz:

Asíntota horiz.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2} = 0$ $\boxed{y=0}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2} = 0$

	$\frac{x+1}{x^2-2}$	$y=0$	
100	0'0101...	0	Por arriba en $+\infty$
1000	0'0010...	0	
-100	-0'00a..	0	Por abajo en $-\infty$
-1000	-0'0009..	0	



A. Vert:

$x^2-2=0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$\boxed{x=-\sqrt{2}}$: $\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^-} \dfrac{x+1}{x^2-2} = \left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{+0}\right] = -\infty$

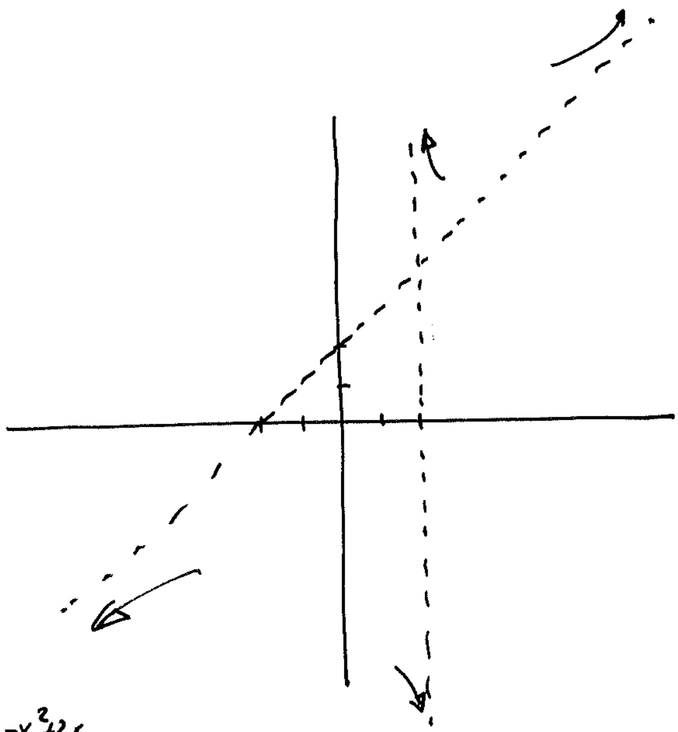
$\lim\limits_{x\to-\sqrt{2}^+} \dfrac{x+1}{x^2-2} = \left[\dfrac{1-\sqrt{2}}{-0}\right] = +\infty$

$\boxed{x=\sqrt{2}}$: $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-} \dfrac{x+1}{x^2-2} = \left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{-0}\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+} \dfrac{x+1}{x^2-2} = \left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{+0}\right] = +\infty$

(oblicuas no tiene, al tener horizontales)

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$



A.V.:

$x-2=0 \to \boxed{x=2}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \left[\dfrac{5}{-0}\right] = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+1}{x-2} = \left[\dfrac{5}{+0}\right] = +\infty$

A. oblicua:

$m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-2x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x-2} - x = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1-x^2+2x}{x-2} = 2$

Ec. asíntota oblicua $\boxed{y = x+2}$

0	2
-2	0

	$\frac{x^2+1}{x-2}$	$x+2$	
100	102'05	102	Por arriba en $+\infty$
1000	1002'005	1002	
-100	-98'05	-98	Por abajo en $-\infty$
-1000	-998'005	-998	

5 a) $\left(\frac{xe^x}{x+e^x}\right)' = \frac{(xe^x)'(x+e^x) - xe^x(x+e^x)'}{(x+e^x)^2} =$

$= \frac{(e^x+xe^x)(x+e^x) - xe^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2} =$

$(xe^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$(x+e^x)' = 1 + e^x$

$= \frac{\cancel{xe^x} + e^{2x} + x^2e^x + \cancel{xe^{2x}} - \cancel{xe^x} - \cancel{xe^{2x}}}{(x+e^x)^2} =$

$$\boxed{\frac{e^{2x} + x^2e^x}{(x+e^x)^2}}$$

b) $\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^3}} + x\sqrt{x} = \frac{x\,x^{2/3}}{x^{3/4}} + x \cdot x^{1/2} = x^{11/12} + x^{3/2}$

$\left(x^{11/12} + x^{3/2}\right)' = \frac{11}{12}x^{-\frac{1}{12}} + \frac{3}{2}x^{1/2} = \boxed{\frac{11}{12\sqrt[12]{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2}}$