

 Departamento de Ciencias Curso 2024-2025	Matemáticas 1 1ºC		
	3ª Evaluación	Derivadas y Aplicaciones	23 mayo de 2025
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente, aunque todos los apartados del mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 60 minutos.

PUNTUACIÓN: La especificada

Calcula la función derivada de cada una de las siguientes funciones, simplificando cuando sea posible (1 punto cada una)

1. $f(x) = \sen^3 \sqrt{2x}$

2. $f(x) = e^{2x} \sec(3x)$

3. $f(x) = x^3 2^{-2x}$

4. $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt[4]{x^3 - 2x}}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{2x^3}{x-1}}$

6. Dada la función: $f(x) = \frac{x^2+4}{2x}$, calcula (3 puntos):

- Dominio, signo, simetrías, puntos de corte y asíntotas
- Monotonía, extremos, curvatura e inflexión
- Representación gráfica

7. Halla la función cuadrática que pasa por el origen de coordenadas y tiene un mínimo relativo en el punto P(2,-4) (2 puntos)

Reżowucja

$$(1) (\sin^3 \sqrt{2x})' = 3 \sin^2 \sqrt{2x} \cdot \cos \sqrt{2x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} = \boxed{\frac{3 \sin^2 \sqrt{2x} \cos \sqrt{2x}}{\sqrt{x}}}$$

$$(2) (e^{2x} \sec 3x)' = 2e^{2x} \sec 3x + e^{2x} (\sec 3x)' =$$

$$(\sec 3x)' = \cos^{-1} 3x = -\cos^{-2} 3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3$$

$$= 3 \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} = 3 \tan 3x \sec 3x$$

$$\boxed{2e^{2x} \sec 3x + e^{2x} \cdot 3 \tan 3x \sec 3x}$$

$$(3) (x^3 \cdot 2^{-2x})' = \frac{3x^2 \cdot 2^{-2x} + x^3 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln 2 \cdot (-2)}{3x^2 \cdot 2^{-2x} - 2x^3 \cdot 2^{-2x} \cdot \ln 2} =$$

$$(4) \left[\ln (x^3 - 2x)^{-1/4} \right]' = \left[-\frac{1}{4} \ln (x^3 - 2x) \right]' = \boxed{-\frac{1}{4} \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x}}$$

i prop. log!

$$(5) \left(\sqrt[3]{\frac{2x^3}{x-1}} \right)' = \left[\left(\frac{2x^3}{x-1} \right)^{1/3} \right]' = \frac{1}{3} \left(\frac{2x^3}{x-1} \right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{2x^3}{x-1} \right)' =$$

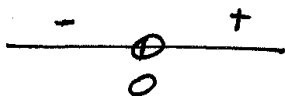
$$\left[\left(\frac{2x^3}{x-1} \right)' = \frac{6x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^2} = \frac{6x^3 - 6x^2 - 2x^3}{(x-1)^2} = \frac{4x^3 - 6x^2}{(x-1)^2} \right]$$

$$\boxed{\frac{1}{3} \frac{4x^3 - 6x^2}{\sqrt[3]{\left(\frac{2x^3}{x-1} \right)^2 \cdot (x-1)^2}}}$$

⑥ $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$

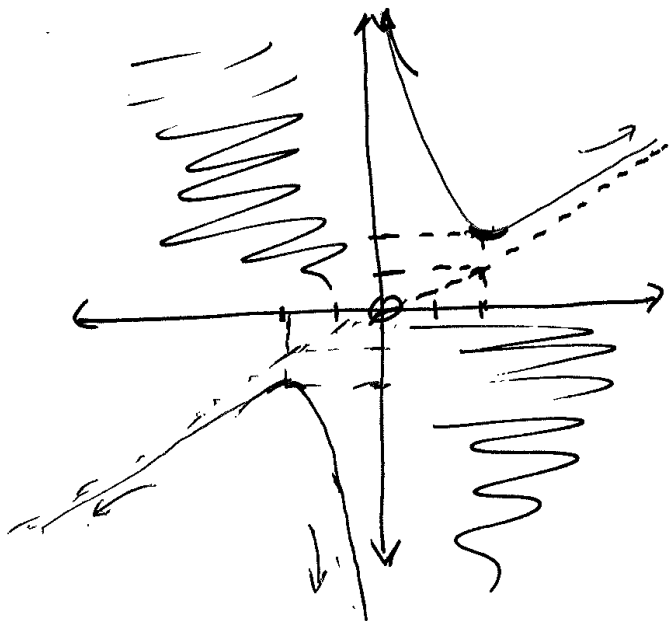
Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\}$

Signo: $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{No sol.}$
 $2x = 0 \Rightarrow x = 0$



$f(x) > 0$ $(0, +\infty)$

$f(x) < 0$ $(-\infty, 0)$



Simetría: $f(-x) = \frac{x^2 + 4}{-2x} = -f(x) \Rightarrow \boxed{\text{Imper.}}$

Puntos corte:

$\frac{0x}{0y}$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 4 = 0 \Rightarrow \text{No sol.}$

$(0, f(0)) \Rightarrow f(0)$ no existe $\Rightarrow \text{No sol.}$

Asintotas:

A.V.:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 4}{2x} = \left[\frac{4}{-0} \right] = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 4}{2x} = \left[\frac{4}{+0} \right] = +\infty$

A.V. en

$\boxed{x = 0}$

A.O.:

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4}{2x^2} - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{2x^2} = 0$

A.O. en

$\boxed{y = \frac{1}{2}x}$

	$\frac{x^2 + 4}{2x}$	$y = \frac{x}{2}$
$+\infty$	100	50
$-\infty$	50	25

$\rightarrow$ Por arriba

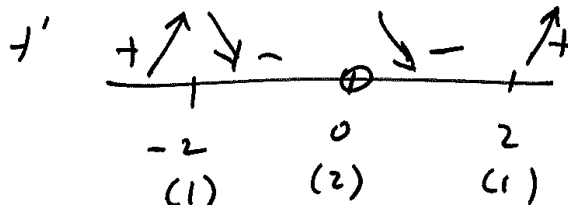
$\rightarrow$ Por abajo (por simetría)

Monotonía y extremos

$$f'(x) = \frac{2x \cdot 2x - (x^2 + 4) \cdot 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 8}{4x^2} = \frac{2x^2 - 8}{4x^2} = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$$

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$2x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$



$f(x)$ crece $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

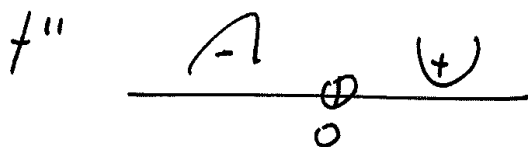
$f(x)$ decrece $(-2, 0) \cup (0, 2)$

Máx en $(-2, -2)$

Mín en $(2, 2)$

Curvatura e inflexión

$$f''(x) = \frac{2x \cdot 2x^2 - (x^2 - 4) \cdot 4x}{4x^4} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 16x}{4x^4} = \frac{16x}{4x^4} = \frac{4}{x^3}$$



$f(x)$ cóncava en $(-\infty, 0)$

$f(x)$ cóncava en $(0, +\infty)$

No hay puntos de inflexión ($0 \notin \text{Dom}(f)$)

⑦ $f(x) = ax^2 + bx + c$

Pasa por $(0,0) \rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$

Pasa por $(2,-4) \rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -4 \Rightarrow 4a + 2b = -4$

Mínimo en $(2,-4) \rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2ax + b \Rightarrow$
 $f'(2) = 4a + b. \text{ Así } 4a + b = 0$

Con lo que nos queda:

$$\begin{aligned} 4a + 2b &= -4 \Rightarrow \left. \begin{aligned} 2a + b &= -2 \\ 4a + b &= 0 \end{aligned} \right\} \\ \hline 2a &= 2 \Rightarrow a = 1 \\ b &= -2 - 2a = -2 - 2 = -4 \end{aligned}$$

Luego la función es

$$f(x) = x^2 - 4x$$

Ahora comprobamos que es un mínimo realmente:

$$f''(x) = (2ax + b)' = 2a = 2$$

$$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Es un mínimo relativo}}}$$