

 Departamento de Ciencias Curso 2024-2025	Matemáticas 1 1ºBC		
	3ª Evaluación	Global 3ª Eval	4 junio de 2025
	NOMBRE:		

ACLARACIONES PREVIAS: No se evaluará nada escrito en esta hoja. Poner el nombre en cada una de las hojas. Numerar las hojas. El examen debe hacerse a bolígrafo negro o azul, no evaluándose nada escrito a lápiz. Se permite la calculadora. El orden de realización es indiferente, aunque todos los apartados de mismo ejercicio deben ir juntos. Tiempo: 90 minutos.

PUNTUACIÓN: La especificada

Calcula la función derivada de cada una de las siguientes funciones, simplificando cuando sea posible (**1 punto cada una**)

1. $f(x) = \cos^2 \sqrt{3x}$

2. $f(x) = 2^{3x} \operatorname{cosec}(3x)$

3. $f(x) = x^3 e^{-2x}$

4. $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$

5. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{3x^2}{2x-1}}$

6. Dada la función: $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$, calcula (**3 puntos**):

- Dominio, signo, simetrías, puntos de corte y asíntotas
- Monotonía, extremos, curvatura e inflexión
- Representación gráfica

7. Calcula el valor de los coeficientes a y b para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenga un punto de inflexión en P(1,2) (**1 punto**)

8. La suma de los catetos de un triángulo rectángulo mide 12 m. Halla las longitudes de los catetos para que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa sea mínima. (**1 punto**)

Resolution

$$(1) (\cos^2 \sqrt{3x})' = 2 \cos \sqrt{3x} (-\sin \sqrt{3x}) \cdot \frac{3}{2\sqrt{3x}} = \boxed{\frac{-3 \sin \sqrt{3x} \cos \sqrt{3x}}{\sqrt{3x}}}$$

$$(2) (2^{3x} \cdot \operatorname{cosec}(3x))' = (2^{3x})' \operatorname{cosec} 3x + 2^{3x} \cdot (\operatorname{cosec}(3x))' \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (2^{3x})' &= 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot (3) = 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \\ (\operatorname{cosec}(3x))' &= (\sin^{-1}(3x))' = -\sin^{-2}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = -\frac{3 \cos 3x}{\sin^2 3x} \\ &= -3 \operatorname{ctg}(3x) \cdot \operatorname{cosec}(3x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot \operatorname{cosec}(3x) + 2^{3x} \cdot (-3 \operatorname{ctg}(3x) \cdot \operatorname{cosec}(3x))$$

$$= \boxed{3 \cdot 2^{3x} \cdot \operatorname{cosec}(3x) [\ln 2 - \operatorname{ctg}(3x)]}$$

$$(3) (x^3 e^{-2x})' = 3x^2 e^{-2x} + x^3 \cdot e^{-2x} \cdot (-2) = \boxed{x^2 e^{-2x} (3 - 2x)}$$

$$(4) \left(\ln \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}} \right)' = \left(\ln (x^2 - 2x)^{-1/3} \right)' = \left(-\frac{1}{3} \ln(x^2 - 2x) \right)' = \boxed{-\frac{1}{3} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}}$$

$$(5) \left(\sqrt[4]{\frac{3x^2}{2x-1}} \right)' = \left(\left(\frac{3x^2}{2x-1} \right)^{1/4} \right)' = \frac{1}{4} \left(\frac{3x^2}{2x-1} \right)^{-3/4} \cdot \left(\frac{3x^2}{2x-1} \right)' =$$

$$\left(\frac{3x^2}{2x-1} \right)' = \frac{6x(2x-1) - 3x^2 \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{12x^2 - 6x - 6x^2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{3x^2}{2x-1} \right)^{-3/4} \cdot \frac{6x^2 - 6x}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x}{4 \sqrt[4]{\left(\frac{3x^2}{2x-1} \right)^3} (2x-1)^2}$$

$$\boxed{\frac{6x^2 - 6x}{4 (2x-1)^2 \sqrt[4]{\left(\frac{3x^2}{2x-1} \right)^3}}}$$

(6) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ Primero calculo las dos primeras derivadas: ¡simplificación típica!

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)^2 - x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x-1)^3 - (-2x) \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{-2(x-1) + 2x \cdot 3}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{-2x + 2 + 6x}{(x-1)^4} = \frac{4x + 2}{(x-1)^4}$$

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$ $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$

• Signo: Numerador y denominador están al cuadrado

$\hookrightarrow f(x) > 0$ en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

• Simetrías:

$f(-x) = \frac{x^2}{(-x-1)^2} \rightarrow$ No simetr.

• Ptos corte:

Ox $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
(0,0)

Oy $(0, f(0)) = (0, 0)$

• Asíntotas:

A. Horizontal $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{A. H en } y = 1 \end{array} \right.$

	$\frac{x^2}{(x-1)^2}$	$y = 1$
100	100...	1
-100	0'99...	1

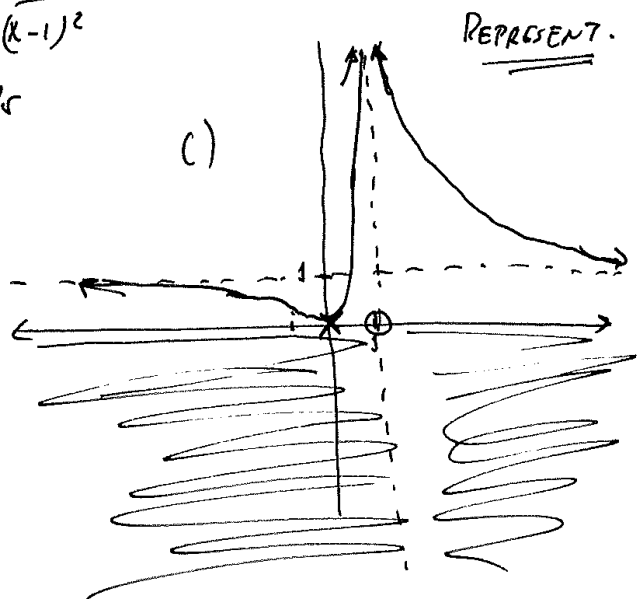
Por arriba en $+\infty$

Por abajo en $-\infty$

A. V $(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$ ← Ecuación A. V.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{+0} \right] = +\infty$

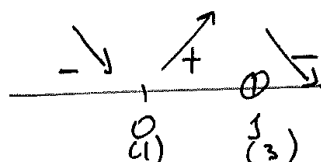


b)

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$-2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ (1)}$$

$$(x-1)^3 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ (3)}$$



$f(x)$ decrec en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

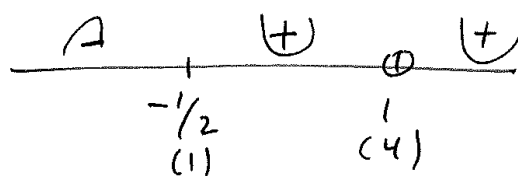
$f(x)$ crec. en $(0, 1)$

Mínimo en $(0, 0)$

$$f''(x) = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$4x+2 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (1)}$$

$$(x-1)^4 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ (4)}$$



$f(x)$ cóncava en $(-\infty, -\frac{1}{2})$

$f(x)$ convexa en $(-\frac{1}{2}, 1) \cup (1, +\infty)$

Pto de inflexión en $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

(7) $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tiene un pto. inflexión en $P(1, 2)$

Pasa por $(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2 \Rightarrow 1 + a + b = 2$

En $P(1, 2)$ tiene un pto. inflexión $\Rightarrow f''(1) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

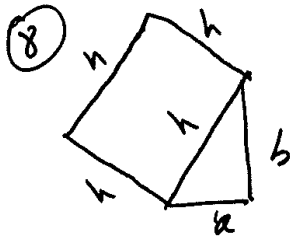
$$f''(1) = 6 + 2a = 0$$

$$f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{P.I.}$$

$$\text{Así: } \begin{cases} a+b = 1 \\ 6+2a = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a = -3 \Rightarrow b = 4}$$





$$a+b=12 \Rightarrow b=12-a$$

Área mínima:

$$\text{Área} \rightarrow S \equiv h^2 = a^2 + b^2$$

$$S = a^2 + b^2$$

$$S = a^2 + (12-a)^2$$

$$S = a^2 + 144 + a^2 - 24a = 2a^2 - 24a + 144$$

$$\text{Derivada } S' = 4a - 24 = 0 \Rightarrow \boxed{a=6 \Rightarrow b=6}$$

comprobamos que es un mínimo:

$$S'' = 4 \Rightarrow S''(6) = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{mínimo}}}$$